ریاضیات مهندسی

مسایل مورد بحث در درس ریاضیات مهندسی: (پیش نیاز معادلات دیفرانسیل و ریاضیات عمومی 2)

1- سریها و انتگرالها و تبدیلهای فوریه **Fourie series ,Integrals & Transforms**

2- معادلات با مشتقات جزیی **Partial Diffrential Equations**

3- متغیرهای مختلط و کاربردها **Complex Variables & Applications**

کتاب اصلی:

1- ریاضیات مهندسی دکتر عبدالله شیدفر

2-Advanced Engineering Mathematics
By : Ervin Kreyszig

3-Advanced Engineering Mathematics
By : C.Ray Wylie
Louis C.Barrett

4- متغیرهای مختلط و کاربرد آنها

ترجمه کتاب :
Complex Variables and Applications
By : Ruel V. Churchill , James W. Brown , Roger F. Verhey

استاد: جناب آقای دکتر احمد باقری

تـابـع مـتـنـاوب:

$\forall x \in R \qquad , P > 0$

$f(x+p) = f(x)$

$f(x+np) = f(x)$

P کوچکترین دوره تناوب یا پریود می باشد.

برای بعضی توابع کوچکترین دوره تناوب معنی ندارد.

$f(x) : p_1 \qquad , g(x) : p_2$

$\alpha f + \beta g : p$

P یا دوره تناوب تابع $\alpha f + \beta g$ عددی است که بر P_1 و P_2 قابل قسمت است.

$\cos t \quad 2\pi \qquad \cos t \quad \cos(t + 2\pi)$

$\cos \omega t \quad \cos \omega (t + p) \qquad , \omega p = 2\pi \Rightarrow p = \dfrac{2\pi}{\omega}$

هر تابع متناوبی را می توان بصورت سری مثلثاتی زیر بنویسیم:

P=2L

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos\frac{\pi}{l}x+a_2\cos\frac{2\pi}{l}x+a_3\cos\frac{3\pi}{l}x+........$$

$$+(b_1\sin\frac{\pi}{l}x+b_2\sin\frac{2\pi}{l}x+b_3\sin\frac{3\pi}{l}x+....)$$

$$or: f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

سری بالا سری فوریه و اعداد a_0 و a_1 و a_2 و....... و b_1 و b_2 و b_3 و...... ضرایب ثابت هستند.

برای محاسبه ضرایب a_n طرفین رابطه قبل را در $\cos\frac{m\pi}{l}x$ ضرب کرده و از طرفین آن در فاصله $(-L,L)$ انتگرالگیری می کنیم.

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi}{l}xdx=$$

$$=\int_{-l}^{l}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\right]\times\cos\frac{m\pi}{l}xdx$$

داریم:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{m\pi}{l}xdx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ l & n=m\end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi}{l}xdx=0$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{m\pi}{l}xdx=0$$

$$\Rightarrow \int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi}{l}xdx = la_m \Rightarrow a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi}{l}xdx$$

m= 0,1,2,3,4,………..

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

همچنین برای محاسبه ضرایب b_n طرفین رابطه را در $\sin\frac{m\pi}{l}x$ ضرب کرده و از طرفین آن در فاصله (-L,L) انتگرالگیری می کنیم:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi}{l}xdx =$$

$$= \int_{-l}^{l}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\right]\times\sin\frac{m\pi}{l}xdx$$

داریم:

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}xdx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ l & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi}{l}xdx = 0$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}xdx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi}{l}xdx = lb_m \Rightarrow b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi}{l}xdx$$

m=1,2,3,4,………..

ضرایب a_m و b_m ضرایب اویلر و سری مربوطه ، سری فوریه نامیده می شود.
ضرایب فوریه را در صورتی می توان بدست آورد که تابع $f(x)$ پیوسته یا پیوسته قطعه ای باشد.چون عبارت فوریه بر طبق حد بدست می آید بنابراین عبارت فوریه هنوز تساوی نیست.

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x)$$

شرط کافی برای برقراری علامت تساوی:

قضیه :

1) اگر تابع f متناوب با دوره تناوب 2L باشد و در هر نقطه حد چپ و راست برابر باشند علامت " ≈" در سری فوریه به علامت "=" تبدیل می شود.

2) یا اینکه تابع متناوب با دوره تناوب 2L پیوسته قطعه ای و حد چپ و راست موجود باشند، علامت " ≈" در سری فوریه به علامت "=" تبدیل می شود.

مثال-
سری فوریه تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-kdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}kdx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-k\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}k\cos nxdx$$

$$=\frac{-k}{n\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{k}{n\pi}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{-k}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx+\frac{k}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx$$

$$=\frac{k}{n\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{k}{n\pi}\cos\Big|_{0}^{\pi}\Rightarrow b_n=\frac{2k}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

مثال-

$$y=\cos^2 x$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\cos^2 xdx=\frac{1}{\pi/2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\frac{\cancel{2}/\cancel{2}}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]+\frac{1}{2\pi}[\sin 2x]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=1+0=1$$

$$a_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos\frac{n\pi}{\frac{\pi}{2}}xdx=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos 2nxdx$$

$$\text{Cos } 2nx = \cos^2 nx - \sin^2 nx$$

سری فوریه توابع زوج و فرد:

تابع زوج- : f(x)=f(-x)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

تابع فرد- : f(x)=-f(-x)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

حاصلضرب دو تابع زوج ، زوج است. **حاصلضرب دو تابع فرد ، زوج است.** **حاصلضرب یک تابع فرد و یک تابع زوج ، فرد است.**

مثال-

سری فوریه تابع $\cos^2 2x$ را بدست آورید.

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx$$

با دوره تناوب π

$$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1/2, a_n = 0 \quad n \geq 3$$

با دوره تناوب $\frac{\pi}{2}$

$$\cos^2 2x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 4nx$$

$$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 1/2, a_n = 0 \quad n \geq 2$$

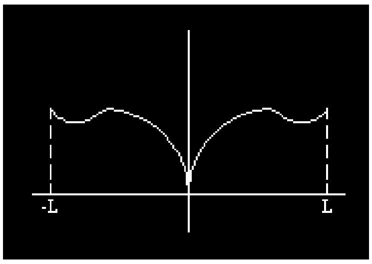
بسط یا گسترش زوج و فرد توابع غیر متناوب:

فرض بر این است که تابع در فاصله $0 \leq x \leq l$ تعریف شده است. می خواهیم سری فوریه ای بنویسیم که مقدار آن در این فاصله با مقدار تابع مذکور یکی باشد.

گسترش زوج هنگامی است که تابع مربوط به فاصله $-l \leq x \leq 0$ طوری در نظر گرفته شود که تابع در فاصله $-l \leq x \leq l$ زوج باشد.

گسترش فرد هنگامی است که تابع مربوط به فاصله $-l \leq x \leq 0$ طوری در نظر گرفته شود که تابع در فاصله $-l \leq x \leq l$ فرد باشد.

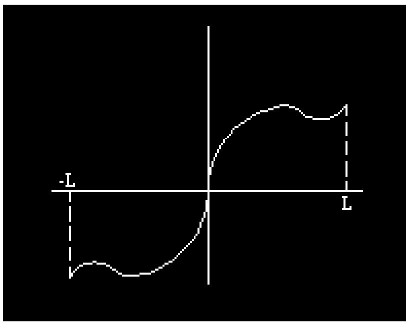
بسط به تابع زوج:



$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \;\; ;n=0,1,2,3,\ldots\ldots$$

$$f^*(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x \;\;=f(x) \qquad ;0<x<l,\, p=2l$$

بسط به تابع فرد:



$$f^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{l}x \;\;=f(x) \;\; ;0<x<l$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \;\; ,n=1,2,3,\ldots\ldots$$

مثال-

سریهای فوریه سینوسی و کسینوسی تابع غیر متناوب زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{l}x & 0<x<l/2\\[2mm] \dfrac{2k}{l}(l-x) & l/2<x<l\end{cases}$$

سری فوریه سینوسی:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=$$

$$=\frac{4k}{l^2}\left[\int_0^{l/2} x\sin\frac{n\pi}{l}xdx+\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\right]$$

$$=\frac{4k}{l^2}\left[\;-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}-\frac{l(l-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}-\right.$$

$$\left.-\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}\;\right]$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{4k}{l\pi n}\left[-\frac{l}{2}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{l}{2}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]=$$

$$\frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$f(x)=\frac{8k}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{l}x\quad ;0<x<l$$

سری فوریه کسینوسی:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$=\frac{4k}{l^2}\left[\int_0^{l/2} x\cos\frac{n\pi}{l}xdx+\int_{l/2}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\right]$$

$$=\frac{4k}{l^2}\left[\ \frac{lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{l(l-x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}-\right.$$

$$\left.-\frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}\ \right]$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{4k}{n^2\pi^2}(2\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1)$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)dx=$$

$$=\frac{4k}{l^2}\left[\int_0^{l/2} xdx+\int_{l/2}^{l}(l-x)dx\right]$$

$$=\frac{4k}{l^2}\left[\frac{1}{2}\frac{l^2}{4}+l(l-\frac{l}{2})-\frac{1}{2}(l^2-\frac{l^2}{4})\right]$$

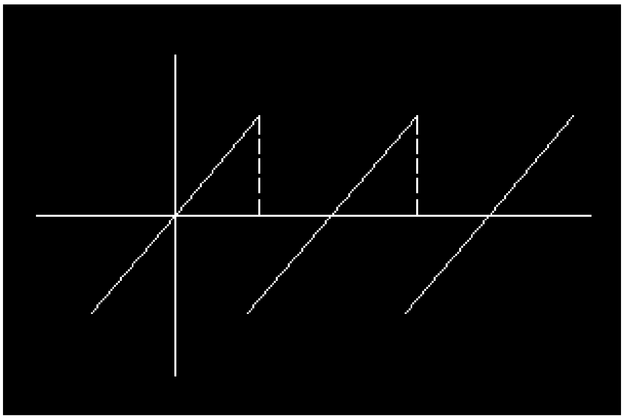
$$=\frac{4k}{l^2}\left[\frac{l^2}{8}+\frac{l^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{3l^2}{4}\right]=\frac{4k}{l^2}\left[\frac{1}{4}l^2\right]=k$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{k}{2}+\frac{4k}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(2\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

جلسه دوم:

مثال-
کاربرد سری فوریه در بدست آوردن مجموع سری های عددی ؛

f(x)=x　　　　　-π<x<π



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}(\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}(-x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow f(x)=x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx$$

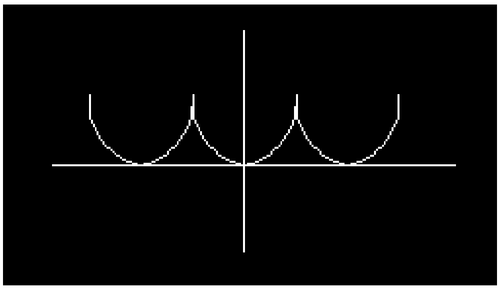
$$\Rightarrow x = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\ldots\right]$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

مثال-

f(x) = x^2 (-π,π)



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2}\cos nx$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + ...+(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2} + ...\right]$$

$$if : x = \pi \Rightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - .... - \frac{1}{n^2} - ....\right]$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$if : x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - .... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + ...\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} .... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + ...$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$$

تمرین:
با استفاده از بسط فوریه تابع متناوب ، مجموع سریهای ذیل را بدست آورید؛

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & 0<x<\pi \\ \dfrac{-\pi}{4} & -\pi<x<0 \end{cases}$$

$a):1-1/3+1/5-1/7+........$
$b):1-1/5+1/7-1/11+1/13-1/17+1/19-.......$
$c):1+1/5-1/7-1/11+1/13+1/17-.......$

قضیه:

می توان با استفاده از مشتقگیری از جملات یک سری فوریه ، سری فوریه مشتق یک تابع را بدست آورد.

قضیه:

می توان با استفاده از انتگرالگیری از جملات یک سری فوریه در هر فاصله دلخواه ، سری فوریه انتگرال یک تابع در آن فاصله را بدست آورد.

مثال-
سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\text{Sin } x\ ,\ \mathbf{0<x<\pi}$ را بدست آورده و سپس با استفاده از مشتقگیری سری فوریه تابع $\cos x$ را بدست آورید.

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(1-n^2)}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0$$

$$\sin x = f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2} \qquad 0<x<\pi$$

$$\cos x = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{1-4n^2} \qquad 0<x<\pi$$

مثال-

با استفاده از سری فوریه $-\pi<x<\pi$ $\theta(x)=x$ و انتگرالگیری ، سری فوریه تابع x^2 را پیدا کنید.

$$x = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\dots\dots\right]$$

$$\frac{x^2}{2} = 2\left[-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots\dots\dots\right] + c$$

برای یافتن c داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = c \int_{-\pi}^{\pi} dx \Rightarrow c = \frac{\pi^2}{6}$$

سری فوریه دوگانه:

فرض بر اینست که تابع $f(x,y)$ نسبت به دو متغیر متناوب و با دوره تناوب 2π است:

$$f(x,y)=f(x+2\pi,y)=f(x,y+2\pi)$$

$$f(x,y)=\frac{a_0(y)}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m(y)\cos mx+b_m(y)\sin mx\right]$$

$$a_m(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)\cos mx\,dx$$

$$b_m(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)\sin mx\,dx$$

$b_m(y),a_m(y)$ نیز متناوب هستند ، چون $f(x,y)$ نسبت به y متناوب است.

$$a_m(y)=\frac{a_{m0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn}\cos ny+b_{mn}\sin ny)$$

$$b_m(y)=\frac{c_{m0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(c_{mn}\cos ny+d_{mn}\sin ny)$$

$$a_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)\cos mx\cos ny\,dx\,dy$$

$$b_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)\cos mx\sin ny\,dx\,dy$$

$$c_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)\sin mx\cos ny\,dx\,dy$$

$$d_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \sin mx \sin ny\, dx\, dy$$

سری فوریه دوگانه تابع f(x,y) عبارتست از:

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0n} \cos ny + b_{0n} \sin ny) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m0} \cos mx + c_{m0} \sin mx) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \cos mx \sin ny +$$
$$+ C_{mn} \sin mx \cos ny + d_{mn} \sin mx \sin ny]$$

چهار حالت:

1:

$$f(x,-y) = f(x,y) \quad , f(-x,y) = f(x,y)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \cos ny + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m0} \cos mx +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{mn} \cos mx \cos ny \right]$$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x,y) \cos mx \cos ny\, dx\, dy$$

2:

$$f(x,-y)=-f(x,y) \quad ,f(-x,y)=f(x,y)$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}\sin ny+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_{mn}\cos mx\sin ny\right]$$

$$b_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\cos mx\sin nydxdy$$

3:

$$f(x,-y)=f(x,y) \quad ,f(-x,y)=-f(x,y)$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} c_{m0}\sin mx+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{mn}\sin mx\cos ny\right]$$

$$c_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin mx\cos nydxdy$$

4:

$$f(-x,y)=-f(x,y) \quad ,f(x,-y)=-f(x,y)$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[d_{mn}\sin mx\sin ny\right]$$

$$d_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin mx\sin nydxdy$$

مثال-

سری فوریه تابع $\begin{cases} -\pi<x<\pi \\ -\pi<y<\pi \end{cases};\quad f(x,y)=xy$ را بدست آورید.

حالت چهارم:

$$f(-x,y)=-f(x,y)\quad ,\, f(x,-y)=-f(x,y)$$

$$d_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} xy\sin mx\sin ny\,dxdy=(-1)^{m+n}\frac{4}{mn}$$

$$\Rightarrow f(x,y)=4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{m+n}\frac{\sin mx\sin ny}{mn}\right]$$

	مشتق	انتگرال
+	X	$\cos nx$
-	1	$\frac{1}{n}\sin nx$
	0	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

$$\int x\cos nx\,dx=\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx$$

	مشتق	انتگرال
+	X^2	$\sin nx$
-	$2x$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
+	2	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$
	0	$\frac{1}{n^3}\cos nx$

$$\int x^2 \sin nx dx = \frac{-x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx$$

انتگرال فوریه:

اگر f روی هر فاصله متناهی پیوسته قطعه ای و دارای مشتق چپ و راست باشد و داشته باشیم

$\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty$ **در اینصورت انتگرال فوریه موجود است و داریم:**

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^{\infty} [a(w)\cos wx + b(w)\sin wx] dw$$

$$a(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx dx$$

$$b(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx dx$$

به ضرایب فوق ، ضرایب اویلر می گوییم.

مثال-

انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} x & |x|<\pi \\ 0 & |x|>\pi \end{cases}$ **را بدست آورید.**

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=2\int_{0}^{\pi}xdx=\pi^2$$

بنابراین انتگرال موجود است.

$$a(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos wxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos wxdx=0$$

$$b(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin wxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin wxdx=\frac{2}{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{w}\cos wx+\frac{1}{w^2}\sin wx\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow b(w)=\frac{2}{w\pi}\left(\frac{1}{w}\sin w\pi-\pi\cos w\pi\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{w}\left(\frac{1}{w}\sin w\pi-\pi\cos w\pi\right)\sin wxdw$$

صورت مختلط سری و انتگرال فوریه:

$$e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

$$\cos nx=\frac{1}{2}\left(e^{inx}+e^{-inx}\right)\qquad ,\sin nx=\frac{1}{2i}\left(e^{inx}-e^{-inx}\right)$$

با قرار دادن این مقادیر در سری فوریه یک تابع متناوب می توان نوشت:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(a_n-ib_n\right)e^{inx}+\frac{1}{2}\left(a_n+ib_n\right)e^{-inx}\right]$$

$$c_0=\frac{a_0}{2}\qquad ,c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)\qquad ,d_n=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$$

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_ne^{inx}+d_ne^{-inx}\right)$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\cos nx-i\sin nx\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$$
$$d_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx$$

همینطور می توان نوشت:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$
$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx\quad ;n=0,\pm1,\pm2,\pm3,.......$$

همینطور:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{l}x}$$

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-in\frac{\pi}{l}x}dx \quad ;n=0,\pm1,\pm2,\pm3,.......$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n) \ , \ c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$$

$$a_n=c_n+c_{-n} \qquad , \ b_n=i(c_n-c_{-n})$$

مثال-
صورت مختلط انتگرال فوریه تابع زیر را بدست آورده و از آنجا انتگرال فوریه حقیقی آنرا بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$$

$$c(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-iwx}dx=\frac{i}{2w\pi}e^{-iwx}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\sin w\pi}{w\pi}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w\pi}{w}e^{iwx}dw$$

$$a(w)=c(w)+c(-w)=2\frac{\sin w\pi}{w\pi}$$

$$b(w)=i\big(c(w)-c(-w)\big)=0$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin w\pi}{w}\cos wx dw$$

$$x=0: f(0)=1\Rightarrow 1=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin w\pi}{w}dw\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin w\pi}{w}dw=\frac{\pi}{2}$$

$$x=w\pi\Rightarrow w=\frac{x}{\pi}\qquad ,dw=\frac{1}{\pi}dx$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{\frac{x}{\pi}}\frac{dx}{\pi}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

تبدیل فوریه:

هر تابعی که در یک فاصله معین پیوسته تکه ای و انتگرالپذیر باشد ، دارای تبدیل فوریه است.

تبدیل فوریه و تبدیل فوریه معکوس تابع $-\infty<x<\infty \quad , \quad y=f(x)$ **عبارتست از:**

$$F\{f\}=\tilde{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$$

$$F^{-1}\{\tilde{f}\}=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(w)e^{iwx}dw$$

مثال-

تبدیل فوریه $f(x)=e^{-ax^2};a>0$ **را پیدا کنید.**

$$F\left\{e^{-ax^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+iwx)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[-\left(x\sqrt{a}+\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2\right]}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{ax}+\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2}dx$$

چون: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}\Rightarrow F\left\{e^{-ax^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{\frac{-w^2}{4a}}$

تبدیل کسینوسی فوریه تابع **f(x)** و معکوس آن:

$$F_c\{f\}=\tilde{f}_c(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx$$

$$F_c^{-1}\{f\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \tilde{f}_c(w)\cos wx\,dw=f(x)$$

تبدیل سینوسی فوریه تابع **f(x)** و معکوس آن:

$$F_s\{f\}=\tilde{f}_s(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx$$

$$F_s^{-1}\{f\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \tilde{f}_s(w)\sin wx\,dw=f(x)$$

تبدیل فوریه و تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی خطی هستند.

مثال-
تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x)=\begin{cases}1 & ;0<x<a\\ 0 & ;x>a\end{cases}$$

$$\tilde{f}_c(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \cos wx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin wa}{w}$$

$$\tilde{f}_s(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \sin wx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos wa}{w}$$

قضیه:

$$|x|\to\infty: f(x)=0$$

$$F\{f'\}=iwF\{f\}$$

$$F\{f'\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)e^{-iwx}\Big|_{-\infty}^{\infty}-(-iw)\int f(x)e^{-iwx}dx\right]=iwF\{f\}$$

و همینطور:

$$F\{f''\}=-w^2F\{f\}$$

قضیه:

$$F_c\{f'\}=wF_s\{f\}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$$

$$F_s\{f'\}=-wF_c\{f\}$$

مثال-

تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ را یافته و با استفاده از آن $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ را محاسبه کنید.

$$F\{f\}=\tilde{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{-iwx}dx=$$

$$=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{\sqrt{2\pi}iw}=\frac{2\sin w}{w\sqrt{2\pi}}\quad ;w\neq 0$$

$$w=0:F\{f\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(w)e^{iwx}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin w}{w}e^{iwx}dw=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

$$x=0:\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin w}{w}dw=1\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw=\pi$$

$$\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw=\frac{\pi}{2}$$

قضیه پیچش Convolution Theorem :

فرض کنید f(x) و g(x) در یک فاصله پیوسته تکه ای ، متناهی و انتگرالپذیر باشند، داریم:

$$F\{f*g\}=\sqrt{2\pi}F\{f\}.F\{g\}$$

مثال-
انتگرال فوریه تابع زیر را بیابید:

$$f(x)=e^{-kx} \qquad x>0 \ , f(-x)=f(x) \ ,(k>0)$$

$$a(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-kx}\cos wx dx=-\frac{2k}{\pi(k^2+w^2)}e^{-kx}\left(-\frac{w}{k}\sin wx+\cos wx\right)$$

$$\Rightarrow a(w)=\frac{2k}{\pi(k^2+w^2)}$$

$$\Rightarrow e^{-kx}=\int_{0}^{\infty}\frac{2k}{\pi(k^2+w^2)}\cos wx dw$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty}\frac{\cos wx}{k^2+w^2}dw=\frac{\pi}{2k}e^{-kx}$$

$$f(x)=e^{-kx} \qquad x>0 \ , f(-x)=-f(x) \ ,(k>0)$$

$$b(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-kx}\sin wx dx=-\frac{2w}{\pi(k^2+w^2)}e^{-kx}\left(-\frac{k}{w}\cos wx+\sin wx\right)$$

$$\Rightarrow b(w)=\frac{2w}{\pi(k^2+w^2)}$$

$$\Rightarrow e^{-kx}=\int_{0}^{\infty}\frac{2w}{\pi(k^2+w^2)}\sin wx dw$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty}\frac{w\sin wx}{k^2+w^2}dw=\frac{\pi}{2}e^{-kx}$$

تمرین:

1) ثابت کنید حاصل جمع سری $0<x<2l$, $\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$ **برابر** L-x **است.**

2) نشان دهید هر تابع f(x) را می توان بصورت حاصل جمع یک تابع فرد ویک تابع زوج نوشت:

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

3) نشان دهید ضرایب بسط سری نمایی فوریه یک تابع زوج ، اعداد حقیقی و یک تابع فرد ، اعداد موهومی است.

بعلاوه تمرینات کتاب

جلسه سوم:

معادلات با مشتقات جزیی:

$$u(x,y) \qquad , f(u,u_{xxx},u_{xy},\ldots)=0 \qquad ,u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

معادله ای که تابع و مشتقات آن در آن وجود داشته باشند، همگن می گویند.
مرتبه معادله به بالاترین درجه مشتق موجود در آن معادله می گویند.
معادله خطی ، معادله ای است که توان تابع و مشتقات آن یک و کمتر از یک باشند.

$$u_{xx}+u_x=0$$

قضیه:

در یک معادله همگن خطی با جوابهای u_1 **و** u_2 **، ترکیب خطی جوابها نیز یک جواب است:** $c_1u_1+c_2u_2 : response$

فرم کلی معادلات خطی مرتبه دو عبارتست از:

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{xy}+Du_x+Eu_y+Fu+G=0$$

A,B,C,D,E,FG **توابعی از** x **و** y **اند.**

معادله فوق در صورتی همگن است که داشته باشیم: G=0

$$\Delta = AC-B^2 \qquad \begin{cases} \Delta=0 & Parabolic \\ \Delta>0 & Elliptic \\ \Delta<0 & Hyperbolic \end{cases}$$

$$u_{tt}=c^2u_{xx}$$ **معادله موج یک بعدی**

$$u_t=c^2u_{xx}$$ **معادله حرارت یک بعدی**

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$ **معادله لاپلاس دو بعدی**

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$$ **معادله لاپلاس سه بعدی**

$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$ **معادله پواسان (دو بعدی)**

تاکید درس روی سه معادله اول می باشد.

مثال هایی از معادلات با مشتقات جزیی:

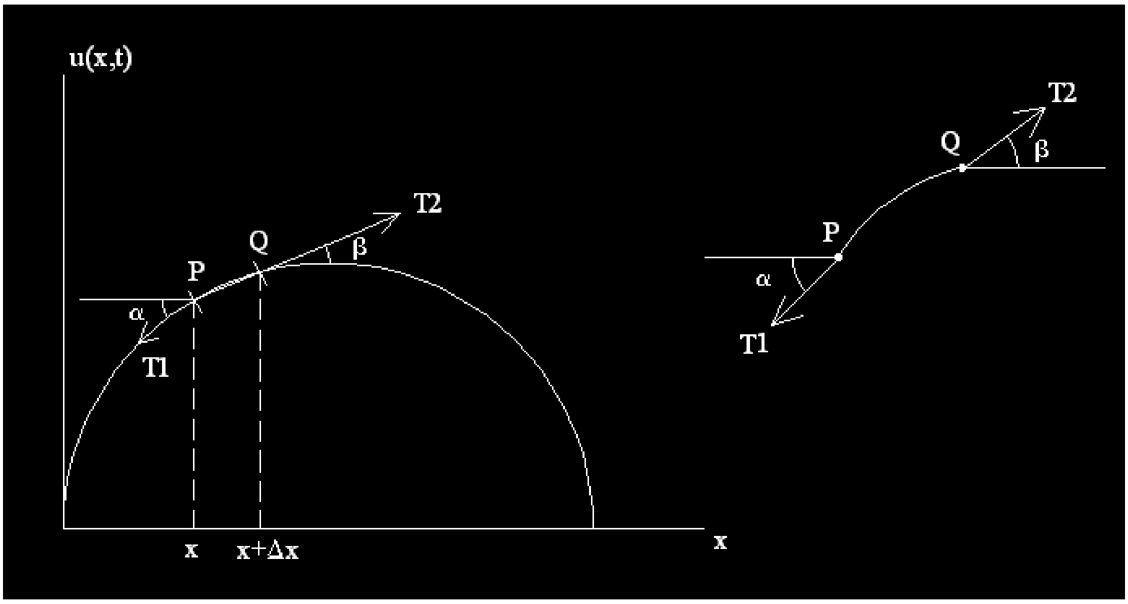
$$1: u_x=0 \Rightarrow u=f(y)$$
$$2: u_{yy}=0 \Rightarrow u_y=f(x), u=yf(x)+g(x)$$
$$3: u_{xx}=0 \Rightarrow u=xf(y)+g(y)$$
$$4: u_{xx}-u_x-2u=0 \Rightarrow u=f(y)e^{2x}+g(y)e^{-x}$$
$$5: u_{yy}+u=0 \Rightarrow u=f(x)\cos y+g(x)\sin y$$
$$6: u_{yy}-u=0 \Rightarrow u=f(x)e^{y}$$
$$7: u_x=0, u_y=0 \Rightarrow u=c$$
$$8: u_{xx}=0, u_{xy}=0, u_{yy}=0 \Rightarrow u=ax+by+c$$

حل مساله موج در فضای یک بعدی یا نخ مرتعش (Vibrating String)

نخی بطول L با دو انتهای ثابت از وضع تعادل خارج ساخته و ارتعاشات آن را مطا لعه می کنیم: نخ کشسان است و جرم نخ در واحد طول ثابت و نیروی کشش کوچک است. ارتعاش بصورت عرضی و در یک صفحه و در امتداد قائم انجام می شود و نخ حرکت افقی ندارد.

طول هر نقطه از نخ را با x و زمان حرکت را با t نشان می دهیم. U(x,t) که تابعی از طول نقطه و زمان است ، نشاندهنده ارتفاع یک نقطه از نخ است. دو نقطه با فاصله x از هم را در نظر می گیریم:

محل شکل



$$T_2 \cos\beta = T_1 \cos\alpha = T$$

$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha$ نیروی محرکه در امتداد قائم بر اثر کشش

$P\Delta x$ نیروی وزن

$F = T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha + P\Delta x$ نیروی محرکه نخ که سبب حرکت می شود

با توجه به قانون دوم نیوتن می توان نوشت:

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha + P\Delta x = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با تقسیم طرفین بر T خواهیم داشت:

$$\tan\beta - \tan\alpha + \frac{p}{T}\Delta x = \frac{\rho}{T}\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\tan\beta = \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} \qquad ,\tan\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + \frac{P}{T} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Delta x \to 0: \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{P}{T} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با تقسیم بر $\frac{\rho}{T}$ **و در نظر گرفتن** $c^2 = \frac{T}{\rho}$ **داریم:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{P}{\rho}$$

اگر f(x) موقعیت اولیه نخ و g(x) سرعت اولیه نخ باشد و همچنین چون نخ در نقاط x=0 **و**x=L **ثابت است می توان نوشت:**

$$\begin{aligned}
&u(x,0) = f(x) && 0 \le x \le l \\
&u_t(x,0) = g(x) && 0 \le x \le l \\
&u(0,t) = 0 && t \ge 0 \\
&u(l,t) = 0 && t \ge 0
\end{aligned}$$

حال این مساله را حل می کنیم:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < l \qquad ,t > 0$$

$$\begin{aligned}
&u(x,0) = f(x) && 0 \le x \le l \\
&u_t(x,0) = g(x) && 0 \le x \le l \\
&u(0,t) = 0 && t \ge 0 \\
&u(l,t) = 0 && t \ge 0
\end{aligned}$$

برای حل از روش تفکیک متغیرها یا روش ضربی استفاده می کنیم:

$$u(x,t)=F(x)G(t)$$

$$u=FG \qquad ,u_{tt}=F\ddot{G} \qquad u_{xx}=F''G$$

$$F\ddot{G}=c^2F''G$$

$$\frac{F''}{F}=\frac{\ddot{G}}{c^2G}$$

$$\frac{F''}{F}=\frac{\ddot{G}}{c^2G}=k$$

$$\Rightarrow\begin{cases}F''-kF=0\\ \ddot{G}-kc^2G=0\end{cases}$$

$$u(0,t)=0\Rightarrow F(0)G(t)=0\Rightarrow F(0)=0$$

$$u(l,t)=0\Rightarrow F(l)G(t)=0\Rightarrow F(l)=0$$

$$F''-kF=0 \qquad F(0)=0 \qquad F(l)=0$$

سه حالت در نظر می گیریم:

$$if\ :k=0\Rightarrow F''=0\Rightarrow F(x)=ax+b$$

$$F(0)=0\Rightarrow b=0,F(l)=0\Rightarrow a=0\Rightarrow F(x)=0,u=0$$

جواب غیر بدیهی

$$if\ :k=\mu^2>0\Rightarrow F''-\mu^2F=0$$

$$\Rightarrow r^2-\mu^2=0\Rightarrow r=\pm\mu\Rightarrow F(x)=ae^{\mu x}+be^{-\mu x}$$

$$or:F(x)=a\cosh\mu x+b\sinh\mu x$$

$$F(0)=0\Rightarrow a=0$$

$$F(l)=0\Rightarrow b\sinh\mu l=0 \qquad \mu,l\neq0\Rightarrow b=0\Rightarrow F(x)=0,u=0$$

جواب غیر بدیهی

پس تنها جواب در حالت سوم می باشد:

$$if: k=-p^2<0$$

$$F''+p^2F=0 \qquad ,F(x)=A\cos px+B\sin px$$

$$F(0)=0\Rightarrow A=0\Rightarrow F(x)=B\sin px$$

$$F(l)=0\Rightarrow B\sin pl=0\Rightarrow \sin pl=0\Rightarrow p=\frac{n\pi}{l}$$

$$\Rightarrow F_n(x)=B\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$k=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\Rightarrow \ddot{G}-kc^2G=0\Rightarrow \ddot{G}+\frac{n^2\pi^2}{l^2}c^2G=0$$

$$\lambda_n{}^2=\frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}\Rightarrow \ddot{G}+\lambda_n{}^2G=0 \qquad ,\lambda_n=c\frac{n\pi}{l}$$

$$\Rightarrow G_n(t)=A'\cos\lambda_n t+B'\sin\lambda_n t \qquad (result)$$

$$u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$b_n=B'B \qquad\qquad a_n=A'B$$

می توان نوشت:

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x}$$

$$u(x,0)=f(x)\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x)$$

بسط سینوسی تابع f(x) ، بنابراین:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

و همچنین:

$$u_t(x,0)=g(x)\Rightarrow u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n \sin\frac{n\pi}{l}x=g(x)$$

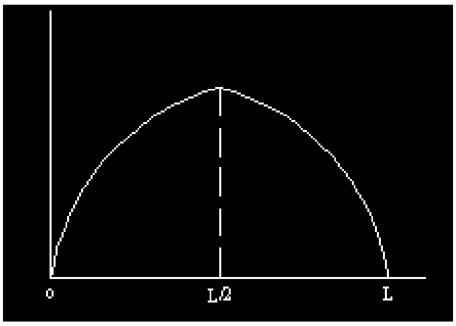
بسط سینوسی تابع g(x) ، بنابراین:

$$b_n\lambda_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$b_n=\frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

مثال:

وسط نخی به طول L را به ارتفاع k بالا برده و رهایش ساخته ایم . معادله تغییر مکانی بر حسب زمان این نخ در هر نقطه آنرا بدست آورید.



$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2k}{l}x & 0<x<\dfrac{l}{2}\\[2mm] \dfrac{2k}{l}(l-x) & \dfrac{l}{2}<x<l\end{cases}$$

$u_t(x,0)=0$ **سرعت اولیه ارتعاش صفر است**

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad ,b_n=0$$

$$a_n=\frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$u(x,t)=\frac{8k}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\lambda_n t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

ادامه درس:

برای مسئله ارتعاش بدنبال تابعی به مشخصات زیر می گردیم:

$$u(x,t)=V(x,t)+w(x,t)$$

$$\begin{cases} V(0,t)=0 & ,V(l,t)=0 \\ w(0,t)=p(t) & ,w(l,t)=q(t) \end{cases}$$

مسئله دارای جوابهای زیادی می باشد. ولی یک جواب مد نظر است:

$$w(x,t)=ax+b$$

$$w(0,t)=p(t)\Rightarrow b=p(t)$$

$$w(l,t)=q(t)\Rightarrow q(t)=al+p(t)\Rightarrow a=\frac{1}{l}[q(t)-p(t)]$$

بنابراین:

$$w(x,t)=\frac{1}{l}[q(t)-p(t)]x+p(t)$$

$$\Rightarrow u(x,t)=V(x,t)+\frac{1}{l}[q(t)-p(t)]x+p(t)$$

$$\Rightarrow u_{tt}=V_{tt}+\frac{x}{l}(\ddot{q}-\ddot{p})+\ddot{p} \qquad ,u_{xx}=V_{xx}$$

با استفاده از دو معادله فوق میتوان نوشت:

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=V_{tt}+\frac{x}{l}(\ddot{q}-\ddot{p})+\ddot{p}-c^2V_{xx}$$

اگر در نظر بگیریم که:

$$V_{tt}+\frac{x}{l}(\ddot{q}-\ddot{p})+\ddot{p}-c^2V_{xx}=F(x,t)$$

$V_{tt}-c^2V_{xx}=F_1(x,t)$ چون

بنابراین می توان نوشت:

$$F_1(x,t)=F(x,t)-\frac{1}{l}(\ddot{q}-\ddot{p})x-\ddot{p}$$

داریم شرط اول $u(x,0)=f(x)$ (در صورت مسئله ذکر شده) :

$$u(x,0)=V(x,0)+\frac{1}{l}[q(0)-p(0)]x-p(0)=f(x)$$

$V(x,0)=f_1(x)$ اگر در نظر بگیریم

$$f_1(x)=f(x)-\frac{1}{l}[q(0)-p(0)]x-p(0)$$

داریم شرط دوم $u_t(x,0)=g(x)$ (در صورت مسئله ذکر شده) :

$$u_t(x,0)=V_t(x,0)+\frac{1}{l}[\dot{q}(0)-\dot{p}(0)]x+\dot{p}(0)=g(x)$$

$V_t(x,0)=g_1(x)$ اگر در نظر بگیریم

$$g_1(x)=g(x)-\frac{1}{l}[\dot{q}(0)-\dot{p}(0)]x-\dot{p}(0)$$

بنابراین برای V داریم :

$$V_{tt}-c^2V_{xx}=F_1(x,t) \qquad 0<x<l \qquad t>0$$

$$V(x,0)=f_1(x) \qquad 0\le x\le l$$
$$V_t(x,0)=g_1(x) \qquad 0\le x\le l$$
$$V(0,t)=0 \qquad t\ge 0$$
$$V(l,t)=0 \qquad t\ge 0$$

جواب را بصورت تابع زیر در نظر می گیریم:

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

با قرار دادن در رابطه اول:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{G}_n+\lambda_n{}^2G_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=F_1(x,t) \qquad \lambda_n=c\frac{n\pi}{l}$$

$$\ddot{G}_n+\lambda_n{}^2G_n=\frac{2}{l}\int_0^l F_1(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$G_n(t)=a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t+\underbrace{G_n{}^*(t)}_{particular\ \ response}$$

$$\boxed{V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t+G_n{}^*(t))\sin\frac{n\pi}{l}x}$$

$$V(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+G_n{}^*(0))\sin\frac{n\pi}{l}x=f_1(x)$$

$$V_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\lambda_n+G_n^*(0))\sin\frac{n\pi}{l}x=g_1(x)$$

$$a_n=-G_n^*(0)+\frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$b_n=\frac{1}{\lambda_n}[-\dot{G}_n^*(0)+\frac{2}{l}\int_0^l g_1(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

مثال-

هدف در این مثال تعیین V می باشد ؛

$$u_{tt}-u_{xx}=t \qquad 0<x<1 \qquad t>0$$

$$u(x,0)=x \qquad 0\le x\le 1$$
$$u_t(x,0)=2 \qquad 0\le x\le 1$$
$$u(0,t)=2t \qquad t\ge 0$$
$$u(1,t)=t \qquad t\ge 0$$

$$u(x,t)=V(x,t)+w(x,t)$$
$$V(0,t)=0 \qquad V(1,t)=0\Rightarrow w(x,t)=ax+b$$
$$b=2t,a=\frac{t-2t}{1}=-t\Rightarrow w=-tx+2t$$

$$u(x,t)=V(x,t)-tx+2t$$
$$V(x,0)=x \qquad u_{xx}=V_{xx}$$
$$u(x,0)=x \qquad u_{tt}=V_{tt}$$

$$V_t(x,0)=u_t(x,0)+x-2=x$$

$$\Rightarrow V_{tt}-V_{xx}=t \qquad V(x,0)=x, V_t(x,0)=x, V(0,t)=0, V(1,t)=0$$

جواب عبارتست از :

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin n\pi x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{G}_n+n^2\pi^2 G_n\right)\sin n\pi x=t$$

$$\ddot{G}_n+n^2\pi^2 G_n=2t\int_0^1 \sin n\pi x dx=\frac{-2t}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{2t\left(1+(-1)^{n+1}\right)}{n\pi}$$

$$G_n=a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t+\frac{2t}{n^3\pi^3}\left(1+(-1)^{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t+\frac{2t}{n^3\pi^3}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\right]\sin n\pi x$$

$$V(x,0)=x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin n\pi x=x$$

$$\Rightarrow a_n=2\int_0^1 x\sin n\pi x dx=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$V_t(x,0)=x \Rightarrow V_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\pi b_n+\frac{2}{n^3\pi^3}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\right]\sin n\pi\pi = x$$

$$\Rightarrow n\pi b_n+\frac{2}{n^3\pi^3}\left(1+(-1)^{n+1}\right)=2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{2}{n^4\pi^4}\left((-1)^n-1\right)+\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1}$$

$$u(x,t)=-tx+2t+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\cos n\pi t+\left[\frac{2}{n^4\pi^4}\left((-1)^n-1\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1}\right]\sin n\pi t+\frac{2t}{n^3\pi^3}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\right\}\sin n\pi x$$

جلسه چهارم:

حل دالامبر مسئله موج:

$$u_{tt}=c^2u_{xx} \qquad 0<x<l \qquad ,t>0$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad 0\le x\le l$$
$$u_t(x,0)=0 \qquad 0\le x\le l$$
$$u(0,t)=0 \qquad t\ge 0$$
$$u(l,t)=0 \qquad t\ge 0$$

$z=x-ct \qquad ,v=x+ct$ **تغییر متغیر**

$$u_t = u_v v_t + u_z z_t = c(u_v - u_z)$$
$$u_{tt} = c[(u_v - u_z)_v v_t + (u_v - u_z)_z z_t] = c^2[u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz}]$$
$$u_{xx} = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

با جایگذاری $: u_{vz} = 0 \to u_v = h(v) \to u = \int h(v)dv + \psi(z) = \varphi(v) + \psi(z)$

$$\Rightarrow u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$
$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \qquad *$$
$$u_t(x,0) = 0 \Rightarrow c(\varphi'(x) - \psi'(x)) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) - \psi'(x) = 0$$
$$\Rightarrow \varphi(x) - \psi(x) = k \qquad *$$

با جمع دو رابطه * داریم:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + k)$$

با تفریق دو رابطه * داریم:

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(f(x) - k)$$

بنابراین:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + k] + \frac{1}{2}[f(x-ct) - k]$$
$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]$$
$$u(0,t) = 0 \Rightarrow f(-ct) = -f(ct)$$
$$u(l,t) = 0 \Rightarrow f(\alpha + 2l) = f(\alpha)$$

توضیح رابطه آخر:

$$f(l+ct)=-f(l-ct)=f(-l+ct)$$
$$if:-l+ct=\alpha$$
$$\Rightarrow f(\alpha)=f(\alpha+2l)$$

یعنی f تابعی فرد با دوره تناوب 2L است و چون f(x) در فاصله $0\le x\le l$ تعریف شده است این تابع باید گسترش فرد f(x) باشد ، یعنی داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)\right]$$

جواب این مسئله را بصورت سری فوریه نیز می توان بدست آورد:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\lambda_n t\sin\frac{n\pi}{l}x$$
$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

حال نشان می دهیم که هر دو جواب با هم یکی هستند :

$$\cos\lambda_n t\sin\frac{n\pi}{l}x=\cos\frac{cn\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right\}+\sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right\}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right\}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x+ct\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)\right]$$

گسترش فرد f(x)

مسئله گرما:

$$u_t - c^2 u_{xx} = F(x,t) \qquad 0 < x < l \qquad t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq l$$
$$u(0,t) = p(t) \qquad t \geq 0$$
$$u(l,t) = q(t) \qquad t \geq 0$$

میله همگن است و ضخامت آن ثابت است ، انتقال حرارت در طول میله انجام می شود و در سطح آن انتقال حرارت نداریم و میله در سطوح جانبی عایق پوش شده است . f(x) درجه حرارت اولیه میله و درجه حرارت های دو سر میله به ترتیب p(t) وq(t) باشد ، آنوقت معادلات نوشته شده درست خواهد بود .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad F(x,t) = 0$$
$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

w(x,t) را طوری در نظر می گیریم که V(0,t) و V(L,t) برابر صفر باشند ، یعنی :

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{q(t) - p(t)}{l} x + p(t)$$

بنابراین :

$$v_t - c^2 v_{xx} = F_1(x,t) \qquad 0 < x < l \qquad t \geq 0$$

$$v(x,0) = f_1(x) \qquad 0 \leq x \leq l$$
$$v(0,t) = 0 \qquad t \geq 0$$
$$v(l,t) = 0 \qquad t \geq 0$$

$$F_1(x,t) = F(x,t) - \frac{q(t) - p(t)}{l} x - p(t)$$

$$f_1(x)=f(x)-\frac{q(0)-p(0)}{l}x-p(0)$$

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

حل مثال 4 کتاب ، صفحه 97 :

حل مسئله انتقال حرارت برای یک میله با طول نا متناهی :

$$u_t=c^2u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty$$
$$u(x,0)=f(x)$$

$$u(x,t)=F(x)G(t)$$
$$\frac{F''}{F}=\frac{\dot{G}}{c^2G}=k$$
$$\dot{G}-kc^2G=0 \qquad ,F''-kF=0$$

$1:k=0\Rightarrow G(t)=c\Rightarrow u(x,t)=F(x)$ **مستقل از** t

غ ق ق

$$2:k=\mu^2>0$$
$$\Rightarrow G(t)=e^{c^2\mu^2t}\Rightarrow u(x,t)=F(x)e^{c^2\mu^2t}$$

یعنی با افزایش زمان درجه حرارت نیز افزایش می یابد . از آنجایی که حرارت در این معادله هیچ محدودیتی در افزایش ندارد بنابراین قابل قبول نیست چون با توجه به خواص اجسام چنین مسئله ای غیر قابل انجام است .

$$3:k=-w^2<0$$
$$\dot{G}+c^2w^2G=0 \qquad ,F''+w^2F=0$$

$$\Rightarrow G(t)=e^{-c^2w^2t} \qquad ,F(x)=a(w)\cos wx+b(w)\sin wx$$

$$\Rightarrow u(x,t,w)=[a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]e^{-c^2w^2t}$$

$$u(x,t)=\int_0^\infty u(x,t,w)dw$$

$$u(x,0)=f(x)$$

$$u(x,0)=\int_0^\infty [a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]dw=f(x)$$

$$u(x,t)=\int_0^\infty [a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]e^{-c^2w^2t}dw$$

$$a(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx dx$$

$$b(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx dx$$

مثال-

$$u(x,0)=\begin{cases} x & |x|\le 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

$$a(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}x\cos wx\,dx=0$$

$$b(w)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}x\sin wx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{w}\cos wx+\frac{1}{w^2}\sin wx\right]_0^1=$$

$$=\frac{2}{\pi w}\left(\frac{\sin w}{w}-\cos w\right)$$

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{w}\left(\frac{\sin w}{w}-\cos w\right)\sin(wx)e^{-c^2w^2t}dw$$

جلسه پنجم :

مسئله موج در فضای دو بعدی :

$$u_{tt}=c^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right) \qquad 0<x<a \ , \ 0<y<b \ , \ t>0$$

$$u(x,y,0)=f(x,y) \qquad 0\le x\le a \ , \ 0\le x\le b$$

$$u_t(x,y,0)=g(x,y) \qquad 0\le x\le a \ , \ 0\le y\le b$$

$$u(x,0,t)=0 \qquad 0\le x\le a \ , \ t\ge 0$$

$$u(x,b,t)=0 \qquad 0\le x\le a \ , \ t\ge 0$$

$$u(0,y,t)=0 \qquad 0\le y\le b \ , \ t\ge 0$$

$$u(a,y,t)=0 \qquad 0\le y\le b \ , \ t\ge 0$$

$$u(x,y,t)=F(x,y)G(t)$$

$$F\ddot{G}=c^2(F_{xx}+F_{yy})G$$

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{F}(F_{xx}+F_{yy})=K_1$$

$$F_{xx}+F_{yy}-K_1F=0 \qquad ,\ddot{G}-K_1c^2G=0$$

$$F(x,y)=H(x)Q(x) \qquad ,u(x,y,t)=H(x)Q(x)G(t)$$

$$QH'' + HQ'' - k_1 HQ = 0$$

$$\frac{H''}{H} = \frac{1}{Q}(k_1 Q - Q'') = k_2$$

$$H'' - k_2 H = 0$$

$$Q'' - (k_1 - k_2)Q = 0$$

$$u(x,0,t) = 0 \Rightarrow Q(0) = 0$$
$$u(x,b,t) = 0 \Rightarrow Q(b) = 0$$

$$u(0,y,t) = 0 \Rightarrow H(0) = 0$$
$$u(a,y,t) = 0 \Rightarrow H(a) = 0$$

$$H'' - k_2 H = 0 \qquad ,H(0) = 0, H(a) = 0$$

وقتی دارای جواب است که:

$$k_2 = -\frac{m^2\pi^2}{a^2} \quad ,m = 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,....$$

$$H_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$Q'' - (k_1 - k_2)Q = 0 \qquad ,Q(0) = 0, Q(b) = 0$$

وقتی دارای جواب است که:

$$k_1 - k_2 = -\frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad ,n = 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,....$$

$$Q_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\ddot{G} - k_1 cG = 0$$

$$-k_1 = -k_2 + \frac{n^2\pi^2}{b^2} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

با فرض $\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2}\right) + \left(\frac{n^2}{b^2}\right)}$

$$\ddot{G} + \lambda_{mn}^2 G = 0 \qquad \Rightarrow G_{mn}(t) = a_{mn}\cos\lambda_{mn}t + b_{mn}\sin\lambda_{mn}t$$

$$\Rightarrow u_{mn}(x,y,t) = (a_{mn}\cos\lambda_{mn}t + b_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(a_{mn}\cos\lambda_{mn}t + b_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

a_{mn} و b_{mn} را باید طوری پیدا کنیم که در شرایط دوگانه صدق کنند.

$$u(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y=f(x,y)$$

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,d_y\,d_x$$

$$u_t(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{mn}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y=g(x,y)$$

$$b_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,d_y\,d_x$$

مثال6- صفحه106

$c=1\ ,\ a=b=\pi$

$f(x,y)=xy\sin x\sin y$, **سرعت اولیه صفر**

سرعت اولیه صفر $\longrightarrow b_{mn}=0$

$$a_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi f\sin mx\sin ny\,d_x d_y=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi x\sin x\sin mx\,dx\times$$

$$\times\int_0^\pi y\sin y\sin ny\,dy$$

$$\int_0^\pi x\sin x\sin mx=\begin{cases}\dfrac{2m\left((-1)^{m+1}-1\right)}{\left(m^2-1\right)^2} & ,m\neq 1\\[2ex] \dfrac{\pi^2}{4} & ,m=1\end{cases}$$

$$a_{mn}=\begin{cases}\dfrac{16}{\pi^2}\dfrac{mn\left((-1)^{m+1}-1\right)\left((-1)^{n+1}-1\right)}{\left(m^2-1\right)^2\left(n^2-1\right)^2} & m\neq 1,n\neq 1\\[2ex] \dfrac{\pi m\left((-1)^{m+1}-1\right)}{\left(m^2-1\right)^2} & m\neq 1,n=1,\lambda_{mn}=\sqrt{m^2+n^2}\\[2ex] \dfrac{\pi n\left((-1)^{n+1}-1\right)}{\left(n^2-1\right)^2} & m=1,n\neq 1\\[2ex] \dfrac{\pi^2}{4} & m=1,n=1\end{cases}$$

با استفا ده از این پروسه می توان مسائل گرمای دو بعدی و گرما و موج سه بعدی را حل نمود.

معادله لاپلاس در مختصات قطبی:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \qquad (r,\theta)$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$$

$$u_{xx} = (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x$$

$$\Rightarrow u_{xx} = (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} \qquad *$$

$$(u_r)_x = u_{rr} r_x + u_{r\theta}\theta_x, (u_\theta)_x = u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta}\theta_x$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} \quad , \quad \theta_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2}$$

$$r_{xx} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}$$

$$\theta_{xx} = -y\left(\frac{-2}{r^3}\right) r_x = \frac{2xy}{r^4}$$

با قرار دادن در معا دله * و با ساده سازی داریم:

$$u_{xx}=\frac{x^2}{r^2}u_{rr}-2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta}+\frac{y^2}{r^4}u_{\theta\theta}+\frac{y^2}{r^3}u_r+2\frac{xy}{r^4}u_\theta$$
$$u_{yy}=\frac{y^2}{r^2}u_{rr}+2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta}+\frac{x^2}{r^4}u_{\theta\theta}+\frac{x^2}{r^3}u_r-2\frac{xy}{r^4}u_\theta$$

با قراردادن در معا دله اصلی داریم:

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$
$$or:$$
$$\nabla^2 u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

معا دله لاپلاس در مختصات استوانه ای: (r,θ,z)

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

معادله لاپلاس در مختصات کروی: **(θ,t,r)**

$$\nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$$

$$x=r\cos\theta\sin\varphi$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z=r\cos\varphi$$

$$\nabla^2 u=u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}+\frac{\cot\varphi}{r^2}u_\varphi+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}u_{\varphi\varphi}$$

بعنوان تمرین

روش حل معادله لاپلاس را با یک مثال نشان می دهیم:

$$u_{xx}+u_{yy}=x+2y$$

$$u(x,0)=x \qquad 0\le x\le \pi \quad , \quad u(0,y)=y \qquad 0\le y\le \pi$$

$$u(x,\pi)=2 \qquad 0\le x\le \pi \quad , \quad u(\pi,y)=\cos y \qquad 0\le y\le \pi$$

$$u(x,y)=V(x,y)+w(x,y) \qquad \begin{cases} V(x,0)=0 \\ V(x,\pi)=0 \end{cases}$$

$$w(x,y)=a(x)y+b(x)$$

$$u(x,0)=V(x,0)+w(x,0)\Rightarrow x=0+b(x)\Rightarrow b(x)=x$$

$$u(x,\pi)=V(x,\pi)+w(x,\pi)\Rightarrow 2=a(x)\pi+x\Rightarrow a(x)=\frac{2-x}{\pi}$$

$$\Rightarrow u(x,y)=V(x,y)+\frac{2-x}{\pi}y+x$$

$$u(0,y)=V(0,y)+w(0,y)$$

$$\Rightarrow y=V(0,y)+\frac{2}{\pi}y\Rightarrow V(0,y)=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)y$$

$$u(\pi,y)=V(\pi,y)+w(\pi,y)$$

$$\Rightarrow \cos y=V(\pi,y)+\frac{2-\pi}{\pi}y+\pi\Rightarrow V(\pi,y)=\cos y-\frac{2-\pi}{\pi}y-\pi$$

$$u_{xx}=V_{xx}\quad,\quad u_{yy}=V_{yy}$$

$$\Rightarrow V_{xx}+V_{yy}=x+2y$$
$$V(x,0)=0$$
$$V(x,\pi)=0$$
$$V(0,y)=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)y$$

$$V(\pi,y)=\cos y-\frac{2-y}{\pi}y-\pi$$
$$V(x,y)=F(x)G(y)$$
$$V_{xx}+V_{yy}=0\Rightarrow\frac{F''}{F}=-\frac{G''}{G}=k$$
$$G''+nG=0\qquad ,F''-kF=0$$
$$V(x,0)=0\Rightarrow G(0)=0\qquad V(x,\pi)=0\Rightarrow G(\pi)=0$$
$$\Rightarrow G_n(y)=p\cos\sqrt{k}\,y+q\sin\sqrt{k}\,y$$
$$\Rightarrow G_n(y)=q\sin ny\qquad ,k=n^2$$

q در ضریب F قرار می گیرد :

$$\Rightarrow V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x)\sin ny$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(F_n''-n^2F_n\right)\sin ny=x+2y$$

$$\Rightarrow F_n''-n^2F_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2y)\sin ny\,dy=$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]x+\frac{-4}{n}(-1)^{n+1}=a_nx+b_n$$

$$\Rightarrow F_n(x) = -\frac{a_n}{n^2}x - \frac{b_n}{n^2} + A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}$$

$$\Rightarrow V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{a_n}{n^2}x - \frac{b_n}{n^2} + A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}\right)\sin ny$$

$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{b_n}{n^2} + A_n + B_n\right]\sin ny = \left(1-\frac{2}{\pi}\right)y$$

$$\Rightarrow A_n + B_n = \frac{b_n}{n^2} + \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\int_0^{\pi} y\sin ny\,dy$$

$$\Rightarrow V(\pi,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{a_n}{n^2}\pi - \frac{b_n}{n^2} + A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi}\right)\sin ny =$$

$$= \cos y - \frac{2-x}{\pi}y - \pi$$

$$\Rightarrow A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} = \frac{b_n}{n^2} + \frac{a_n}{n^2}\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos y - \frac{2-\pi}{\pi}y - \pi\right)\sin ny\,dy$$

پس از محاسبه A_n , B_n , $V(x,y)$ مشخص شده و از آنجا $u(x,y)$ بدست می آید.

معادله لژاندر:

$$(1-x^2)G'' - 2xG' + n(n+1)G = 0$$

n عدد طبیعی (معادله لژاندر)

$$p_n(x)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^2-\frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!}x^{n-2}+........=$$

$$=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$$

$$M=\frac{n}{2} \qquad n{:}even$$

$$M=\frac{n-1}{2} \qquad n:odd$$

$$p_0(x)=1, p_1(x)=x, p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), p_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$p_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), p_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

خاصیت تعامد دنباله توابع لژاندر در $-1\leq x\leq 1$

$$\int_{-1}^{1}p_n(x)p_m(x)dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}$$

می توان نوشت :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n p_n(x)$$

با ضرب طرفین در $p_m(x)$ و انتگرالگیری در فاصله $-1\leq x\leq 1$ داریم :

$$a_m=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)p_m(x)dx$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) p_n(x) dx$$

معادله بسل :

هر معادله بصورت $x^2 w'' + x w' + (x^2 - v^2) w = 0$

v **عدد حقیقی است (معادله بسل از مرتبه** v **ام)**

جوابهای مستقل خطی :

$$J_{-v}(x) = x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-v} m! \Gamma(m-v+1)}$$

$$J_v(x) = x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+v} m! \Gamma(m+v+1)}$$

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ **تابع گاما است .**

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$
$$\Gamma(n+1) = n!$$

اگر v **عدد صحیحی باشد ،** $v = n$ **و دو جواب** $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ **وابسته خطی بوده و داریم:**

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2 (1!)^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + \ldots\ldots$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3(1!)(2!)}+\frac{x^5}{2^5(2!)(3!)}-\frac{x^7}{2^7(3!)(4!)}+......$$

در حالت V=n جواب دوم معادله بسل دارای یک جمله لگاریتمی است و صفر یک نقطه تکین آن است .

$$J_0(x)=0\Rightarrow\alpha_1=2.4048,\alpha_2=5.5201,\alpha_3=8.6537,$$
$$\alpha_4=11.7915,\alpha_5=14.9304$$

اگر $\{\alpha_n\}_{n=1}$ یک دنباله دلخواه از جوابهای معادله $J_0(x)$ باشد $\{J_0(\alpha_n x)\}_{n=1}$ در فاصله صفر تا هر عدد ثابت R نسبت به تابع وزن متعامدند .

$$\int_0^R xJ_0(\alpha_n x)J_0(\alpha_m x)dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{R^2}{2}J_1{}^2(\alpha_n) & n=m\end{cases}$$

هر تابعی را می توان بصورت یک سری از توابع بسل مرتبه صفرم نوشت :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nJ_0(\alpha_n x)$$

$$a_m=\frac{2}{R^2J_1{}^2(\alpha_m)}\int_0^R xf(x)J_0(\alpha_m x)dx$$

$$a_n=\frac{2}{R^2J_1{}^2(\alpha_n)}\int_0^R xf(x)J_0(\alpha_n x)dx$$

حل مسئله لاپلاس در یک کره :

$$\nabla^2 u=0 \qquad , \qquad u(r,0,\varphi)=t(\varphi)$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta,\varphi)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

مسئله پتا نسیل است و u به θ بستگی ندارد.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=0$$

$$u(r,\theta)=F(r)G(\varphi)$$

$$G\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)+\frac{F}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\sin\varphi\frac{dG}{d\varphi}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)=-\frac{1}{G\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\sin\varphi\frac{dG}{d\varphi}\right)=k$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dF}{dr}\right)-kF=0\\[2ex] \dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{d}{d\varphi}\left(\sin\varphi\dfrac{dG}{dF}\right)+kG=0\end{cases}$$

در معادله دوم:

$$w=\cos\varphi \quad ,\sin^2\varphi=1-w^2 \quad ,\frac{d}{d\varphi}=\frac{d}{dw}\frac{dw}{d\varphi}=-\sin\varphi\frac{d}{dw}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dw}\left((1-w^2)\frac{dG}{dw}\right)+kG=0$$

$$k=n(n+1)\Rightarrow (1-w^2)G_n''-2wG_n'+n(n+1)G_n=0$$

معادله لژاندر

$G_n(w)=P_n(w)$ **چند جمله ای درجه n ام لژاندر**

$r^2F''+2rF'-n(n+1)F=0$ **معادله اویلر**

$$F_n(r)=a_nr^n+\frac{b_n}{r^{n+1}}$$

$$\Rightarrow u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nr^n+\frac{b_n}{r^{n+1}}\right)p_n(\cos\varphi)$$

برای داخل کره :

اگر b_n مخالف صفر باشد یعنی u در مرکز کره بی نهایت است و این غیر قابل قبول است.

$$\Rightarrow b_n=0$$

$$u(n\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^np_n(\cos\varphi)$$

$$u(r,\varphi)=f(\varphi)\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n p_n(\cos\varphi)=f(\varphi)$$

$$\varphi=\cos^{-1}w\ ,\quad f(\varphi)=f(\cos^{-1}w)=g(w)$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n p_n(w)=g(w)$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2n+1}{2R^n}\int_{-1}^{1}g(w)P_n(w)dw$$

برای خارج کره :

اگر a_n مخالف صفر باشد یعنی n در بی نهایت،بی نهایت است و این غیر قابل قبول است.

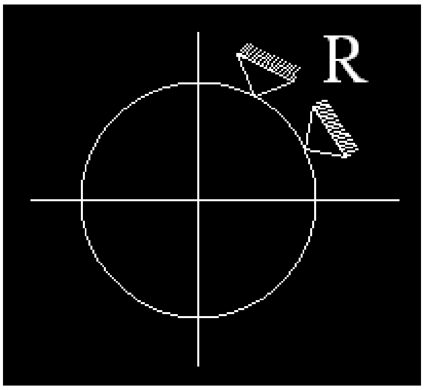
$$\Rightarrow a_n=0\Rightarrow u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{r^{n+1}}p_n(\cos\varphi)$$

$$u(R,\varphi)=f(\varphi)$$

$$u(R,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{R^{n+1}}p_n(\cos\varphi)=f(\varphi)$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{2n+1}{2}R^{n+1}\int_{-1}^{1}g(w)P_n(w)dw$$

حل مسئله ارتعاش یک ناحیه دایروی :



ارتعاش روی محیط دایره نداریم

ارتعاش اولیه وسرعت اولیه ارتعاش معلوم است

ارتعاش بصورت شعاعی(ازمرکز تا محیط)انجام می شود

$$u_{tt} = c^2 (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta})$$

$$u_{tt} = c^2 (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r)$$ **چون تابع ارتعاش بستگی به θ ندارد**

$$u(r,0) = f(r) \qquad , u_t(r,0) = g(r) \qquad , u(R,t) = 0$$

$$u(r,t) = w(r) G(t)$$

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{w}(w'' + \frac{1}{r} w') = -k^2 \Rightarrow w\ddot{G} = c^2 (w'' + \frac{1}{r} w') G$$

$$\ddot{G} + c^2 u^2 G = 0 \qquad , w'' + \frac{1}{r} w' + k^2 w = 0$$

$s = kr \rightarrow$ **بسل مرتبه صفرم**

$$w' = \frac{dw}{dr} = \frac{dw}{ds}\frac{ds}{dr} = k\frac{dw}{ds}$$

$$w'' = k^2 \frac{d^2 w}{ds^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dw}{ds} + w = 0$$

بسل مرتبه صفرم - جواب $J_0(s)$:

$$J_0(s) = J_0(kr) = w(r)$$

$$u(R,t) = 0 \Rightarrow J_0(kR) = 0 \rightarrow w(R) = 0$$

kR باید برابر ریشه های J_0 باشد

$$kR = \alpha_n \qquad ,n = 1,2,3,.........$$

$$w_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$$

$$\ddot{G}_n + \lambda_n{}^2 G_n = 0 \qquad ,\lambda_n = c\frac{\alpha_n}{R} = ck$$

$$G_n(t) = a_n \cos\lambda_n t + b_n \sin\lambda_n t$$

$$u(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos\lambda_n t + b_n \sin\lambda_n t) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$$

$$u(r,0)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)=f(r)$$

$$a_n=\frac{2}{R^2 J_1^{\,2}(\alpha_n)}\int_0^R rf(r)J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)dr$$

$$u_t(r,0)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\lambda_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)=g(r)$$

$$b_n=\frac{2}{c\alpha_n RJ_1^{\,2}(\alpha_n)}\int_0^R rg(r)J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)dr$$

حل مسائل معادلات با مشتقات جزئی به کمک تبدیلات فوریه و لاپلاس :

$$F_s\{f\}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=f_s(x) \qquad ,n=1,2,3,.....$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin nx$$

$$F_c\{f\}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx=f_c(x) \qquad ,n=0,1,2,3,.....$$

$$f(x)=\frac{1}{2}f_c(0)+\sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\cos nx$$

$$F_s\{f''\}=\frac{2n}{\pi}\left[f(0)-(-1)^n f(\pi)\right]-n^2F_s\{f\}$$

$$F_c\{f''\}=\frac{2}{\pi}\left[(-1)^n f'(\pi)-f'(0)\right]-n^2F_c\{f\}$$

اعداد مختلط :

$$z = x + iy \qquad\qquad z = (x, y)$$
$$x = \operatorname{Re} z \qquad , y = \operatorname{Im} z$$
$$i = \sqrt{-1} = (0,1) = 0 + i1 = i$$
$$z = x + iy \qquad , \bar{z} = x - iy$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad , e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$z = re^{i\theta} \qquad , z^n = r^n e^{in\theta}$$
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$
$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \qquad , k = 0,1,2,3,4,\ldots\ldots$$
$$-1,-2,-3,-4,\ldots\ldots$$

تعریف همسایگی ε :

$$N_\varepsilon(z_0) = \{ z \mid z \in \not\subset \qquad ; |z - z_0| < \varepsilon \}$$

نقطه کرانه ای
نقطه خارجی
نقطه داخلی

مجموعه D را مجموعه باز می نامند هرگاه تمام آن نقاط داخلی باشد.
مجموعه D را مجموعه بسته می نامند هرگاه شامل نقاط مرزی خود باشد.
مجموعه D را مجموعه ساده می نامند هرگاه مرز خود را قطع نکند.
مجموعه D را مجموعه همبند می نامند هرگاه بتوان دو نقطه از آن را با یک خط شکسته به هم وصل کرد و کلیه نقاط این خط شکسته واقع در مجموعه باشد.

تابع مختلط اگر D یک مجموعه باز و همبند باشد و $z \in D$ $w=u+iv$ آنگاه اگر به ازای هر Z دو W وجود نداشته باشد، W را تابعی از Z می نامیم.

$$w=f(z) \qquad ,z=x+iy$$
$$w=u+iv$$

تعریف حد درتوابع مختلط :

$$\forall \varepsilon>0 \qquad \exists \delta>0 \qquad |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-w_0|<\varepsilon$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z)=w_0$$

$$\lim_{z \to z_0}(f(z)+g(z))=\lim_{z \to z_0} f(z)+\lim_{z \to z_0} g(z)$$

$$\lim_{z \to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=(\lim_{z \to z_0} f(z))\times\lim_{z \to z_0}\frac{1}{g(z)} \qquad ,\lim_{z \to z_0} g(z)\neq 0$$

تعریف مشتق :

$$f'(z)=\lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

تابع W=f(z) در نقطه z_0 در صورتی تحلیلی است که تابع f(z) در یک همسایگی از z_0 دارای مشتق باشد.

تابع W=f(z) در صورتی تام است که در کلیه نقاط صفحه Z تحلیلی باشد.

قضیه 1 : (شرایط معادلات کشی – ریمان)

اگر تابع $f(z)=u+iv$ در نقطه $z=x+iy$ دارای مشتق باشد آنگاه :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad ,\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

قضیه 2 :

اگر $f(z)$ در معادلات کشی – ریمان صدق کند و در یک همسایگی از (x,y) پیوسته و با مشتقات جزئی پیوسته باشد آنگاه $f'(z)$ موجود و برابر است با :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

معادلات کشی – ریمن در مختصات قطبی :

$$u_r=\frac{1}{r}v_\theta \qquad ,v_r=-\frac{1}{r}u_\theta$$
$$f'(z)=(u_r+iv_r)e^{-i\theta}$$

<u>مثالهای صفحه 159</u>

تابع همساز :

تابع پیوسته $u(x,y)$ را تابع همساز نامند هرگاه مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته بوده و در معادله لاپلاس صدق کند.

اگر $u+iv$ تابعی تحلیلی در نقطه Z باشد آنگاه u و v توابعی همساز هستند.

$$u_x = v_y \qquad , u_y = -v_x$$

$$x \qquad\qquad y$$

$$u_{xx} = v_{yx} \qquad , u_{yy} = -v_{xy}$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad , v_{xx} + v_{yy} = 0$$

اگر f(z)=u+iv تحلیلی باشد v را مزدوج همساز u می نامیم.

مثال-

$$u = x^2 - y^2$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$v_x = -u_y = 2y \qquad , u_x = v_y$$

$$v = 2yx + h(y)$$

$$u_x = v_y \Rightarrow 2x = 2x + h'(y) \Rightarrow h'(y) = 0 \rightarrow h(y) = c$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + c$$

$$if : c = 0 \Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 + i2xy = z^2$$

حل یک تمرین از روش دالامبر:

در روش دالامبر بایستی طرف ثانی و شرایط کرانه ای صفر باشند

$$u_{tt}-4u_{xx}=x+t$$
$$u(x,0)=1,u_t(x,0)=x$$
$$u(0,t)=0,u(\pi,t)=0$$
$$u=v+w\Rightarrow v_{tt}+w_{tt}-4v_{xx}-4w_{xx}=x+t$$

فرض $w_{tt}=0$

$$v_{tt}-4v_{xx}=0$$
$$\Rightarrow -4w_{xx}=x+t\Rightarrow w_{xx}=-\frac{x}{4}-\frac{t}{4}$$
$$w_x=-\frac{x^2}{8}-\frac{t}{4}x+a \qquad ,w=-\frac{x^3}{24}-\frac{t}{8}x^2+ax+b$$

a و b را از شرایط معادله بدست می آوریم :

$$u(0,t)=v(0,t)+w(0,t)$$
$$\Rightarrow w(0,t)=0\rightarrow b=0$$
$$u(\pi,t)=v(\pi,t)+w(\pi,t)\Rightarrow w(\pi,t)=0\Rightarrow -\frac{\pi^3}{24}-\frac{t}{8}\pi^2+a\pi=0$$
$$\Rightarrow a=\frac{\pi^2}{24}+\frac{t\pi}{8}$$

$$u=v+w=v-\frac{x^3}{24}-\frac{t}{8}x^2+(\frac{\pi^2}{24}+\frac{t\pi}{8})x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt}-4v_{xx}=0 \\ v(x,0)=1+\frac{x^3}{24}-\frac{\pi^2}{24}x=f(x) \\ v_t(x,0)=x+\frac{x^2}{8}-\frac{\pi}{8}x=\frac{x^2}{8}+x(1-\frac{\pi}{8})=g(x) \\ v(0,t)=v(\pi,t)=0 \end{cases}$$

$$z=x-2t \qquad ,T=x+2t$$
$$v_{ZT}=0\Rightarrow v_Z=h(z),v=\varphi(z)+\psi(T)$$
$$v(x,t)=\varphi(x-2t)+\psi(x+2t)$$
$$v(x,0)=f(x)\Rightarrow\varphi(x)+\psi(x)=f(x)$$
$$v_t(x,0)=g(x)\Rightarrow -2\varphi'(x)+2\psi'(x)=g(x)$$
$$\Rightarrow -2\varphi(x)+2\psi(x)=G(x)+k$$

$$v_t=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \qquad z=x-2t,dz=dx$$
$$G(x)=\int g(x)dx=\int\left[\frac{x^2}{8}+x\left(1-\frac{\pi}{8}\right)\right]dx=\frac{x^3}{24}+\frac{x^2}{2}(1-\frac{\pi}{8})$$
$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x)$$
$$-2\varphi(x)+2\psi(x)=G(x)+k$$
$$\psi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+\frac{G(x)}{2}+\frac{k}{2}\right]$$
$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)-\frac{G(x)}{2}-\frac{k}{2}\right]$$

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-2t)+f(x+2t)\right]+\frac{1}{4}\left[G(x+2t)-G(x-2t)\right]$$

$$v(0,t)=0\Rightarrow\frac{1}{2}\left[f(-2t)+f(2t)\right]+\frac{1}{4}\left[G(2t)-G(-2t)\right]=0$$

$$\Rightarrow f(-2t)+f(2t)=0\rightarrow f(-2t)=-f(2t)$$ تابع فرد است

$$\Rightarrow G(2t)-G(-2t)=0\rightarrow G(2t)=G(-2t)$$ تابع زوج است

$$v(\pi,t)=0\Rightarrow\frac{1}{2}\left[f(\pi-2t)+f(\pi+2t)\right]+\frac{1}{4}\left[G(\pi+2t)-G(\pi-2t)\right]=0$$

$$\Rightarrow f(\pi-2t)+f(\pi+2t)=0\rightarrow -f(2t-\pi)+f(\pi+2t)=0$$
$$\Rightarrow f(\pi+2t)=f(-\pi+2t)$$ تابع متناوب

$$G(\pi+2t)-G(\pi-2t)=0\rightarrow G(2t+\pi)-G(-\pi+2t)=0$$
$$\Rightarrow G(\pi+2t)=G(-\pi+2t)$$ تابع متناوب

چون f متناوب (2π) و فرد است لذا *f گسترش فرد را جانشین آن می کنیم .

چون G متناوب (2π) و زوج است لذا *G گسترش زوج را جانشین آن می کنیم .

$$f^*=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\ \ ,\ \ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1+\frac{x^3}{24}-\frac{\pi^2}{24}x\right)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\qquad l=\pi$$

$$G^*=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x\ \ ,\ \ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^3}{24}+\frac{x^2}{2}(1-\frac{\pi}{8})\right)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\qquad l=\pi$$

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x-2t)+f^*(x+2t)\right]+\frac{1}{4}\left[G^*(x+2t)-G^*(x-2t)\right]$$

حل یک تمرین دیگر از روش دالامبر :

$$u_{tt}-4u_{xx}=0$$
$$u(x,0)=0, u_t(x,0)=x+1$$
$$u(0,t)=0, u(\pi,t)=1$$
$$u=v+w \Rightarrow v_{tt}+w_{tt}-4v_{xx}-4w_{xx}=0$$

فرض $w_{tt}=0$

$$v_{tt}-4v_{xx}=0$$
$$\Rightarrow -4w_{xx}=0 \Rightarrow w_{xx}=0$$
$$w_x=a \rightarrow w=ax+b$$

a و b را از شرایط معادله بدست می آوریم :

$$u(0,t)=v(0,t)+w(0,t)$$
$$\Rightarrow w(0,t)=0 \rightarrow b=0$$
$$u(\pi,t)=v(\pi,t)+w(\pi,t) \Rightarrow 1=0+a\pi \Rightarrow a=\frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow w=\frac{1}{\pi}x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt}-4v_{xx}=0 \\ v(x,0)=-\frac{1}{\pi}x=f(x) \\ v_t(x,0)=x+1=g(x) \\ v(0,t)=v(\pi,t)=0 \end{cases}$$

$$z = x - 2t \qquad ,T = x + 2t$$
$$v_{ZT} = 0 \Rightarrow v_Z = h(z), v = \varphi(z) + \psi(T)$$
$$v(x,t) = \varphi(x-2t) + \psi(x+2t)$$
$$v(x,0) = f(x) \Rightarrow \varphi(x) + \psi(x) = f(x)$$
$$v_t(x,0) = g(x) \Rightarrow -2\varphi'(x) + 2\psi'(x) = g(x)$$
$$\Rightarrow -2\varphi(x) + 2\psi(x) = G(x) + k$$

$$v_t = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \qquad z = x - 2t, dz = dx$$

$$G(x) = \int g(x)dx = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x$$

تکرار مثال قبل

$$f^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x \ , \ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{\pi}x\right)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad l = \pi$$

$$G^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x \ , \ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \qquad l = \pi$$
$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[f^*(x-2t) + f^*(x+2t)\right] + \frac{1}{4}\left[G^*(x+2t) - G^*(x-2t)\right]$$

<u>مسئله 5a صفحه 92 حل شود</u>

مسئله 5a صفحه 92 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \qquad 0<x<\pi \qquad t>0$$
$$u(x,0)=0,u_t(x,0)=0 \qquad 0\le x\le\pi$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=u_{xx}(0,t)=0,u_{xx}(\pi,t)=\sin t \qquad t\ge 0$$

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$
$$v(0,t)=v(\pi,t)=v_{xx}(0,t)=v_{xx}(\pi,t)=0$$
$$w(x,t)=ax^3+bx^2+cx+d \qquad w_{xx}=6ax+2b$$

$$u(x,t)=v(x,t)+ax^3+bx^2+cx+d$$
$$u(0,t)=v(0,t)+d=0\Rightarrow d=0$$
$$u(\pi,t)=v(\pi,t)+a\pi^3+b\pi^2+c\pi=0\Rightarrow a\pi^2+b\pi+c=0 \qquad *$$
$$u_{xx}(0,t)=v_{xx}(0,t)+2b=0\Rightarrow b=0$$
$$u_{xx}(\pi,t)=0+6a\pi=\sin t\Rightarrow a=\frac{\sin t}{6\pi}$$
$$*\Rightarrow\frac{\sin t}{6\pi}\pi^2+c=0\Rightarrow c=-\frac{\pi}{6}\sin t$$
$$\Rightarrow u(x,t)=v(x,t)+\frac{\sin t}{6\pi}x^3-\frac{\pi}{6}\sin tx$$

$$u_{tt}+c^2u_{xxxx}=0$$
$$u_{tt}=v_{tt}-\frac{\sin t}{6\pi}x^3+\frac{\pi}{6}\sin tx \qquad u_{xxxx}=v_{xxxx}$$

$$\Rightarrow v_{tt}-\frac{\sin t}{6\pi}x^3+\frac{\pi}{6}\sin tx+c^2v_{xxxx}=0$$
$$\Rightarrow v_{tt}+c^2v_{xxxx}=\frac{\sin t}{6\pi}x^3-(\frac{\pi}{6}\sin t)x$$

$$u(x,0)=v(x,0)=0 \qquad u_t(x,0)=v_t(x,0)+\frac{x^3}{6\pi}-\frac{\pi}{6}x=0$$

$$\rightarrow v_t(x,0)=-\frac{x^3}{6\pi}+\frac{\pi}{6}x$$

$$u(0,t)=v(0,t)=0$$

$$u(\pi,t)=v(\pi,t)+\frac{\sin t}{6\pi}\pi^3-\frac{\pi\sin t}{6}\pi=0\rightarrow v(\pi,t)=0$$

$$u_{xx}(0,t)=v_{xx}(0,t)=0$$

$$u_{xx}(\pi,t)=v_{xx}(\pi,t)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} v_{tt}+c^2v_{xxxx}=\dfrac{\sin t}{6\pi}x^3-(\dfrac{\pi}{6}\sin t)x \\ v(x,0)=0, v_t(x,0)=-\dfrac{x^3}{6\pi}+\dfrac{\pi}{6}x \\ v(0,t)=0, v(\pi,t)=0 \end{cases}$$

روش جزئی

$$v(x,t)=F(x)G(t) \qquad v_{tt}=F\ddot{G} \qquad v_{xxxx}=F^{(4)}G$$

$$F\ddot{G}+c^2F^{(4)}G=0$$

$$\frac{F^{(4)}}{F}=\frac{\ddot{G}}{c^2G}=k \qquad k=-p^4$$

$$F^{(4)}-kF=0\rightarrow F^{(4)}+p^4F=0\Rightarrow F_n(x)=\sin nx$$

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\sin nx \qquad v_{tt}=\ddot{G}_n\sin x \qquad v_{xxxx}=G_nn^4\sin x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{G}_n + c^2 n^4 G_n\right)\sin nx = \frac{\sin t}{6\pi}(x^3 - \pi^2 x)$$

$$\ddot{G}_n + c^2 n^4 G_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{6\pi}(x^3 - \pi^2 x)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{\sin t}{3\pi^2}\left[\cos nx\left(\frac{x^2 + \pi^2 x}{n} + \frac{2x}{n} - \frac{2}{n^3}\right) + \sin nx\left(\frac{3x^2 - \pi^2}{n^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$\ddot{G}_n + c^2 n^4 G_n = \frac{2nc^2}{\pi}(-1)^n \sin t$$

$$\ddot{G}_n + c^2 n^4 G_n = 0 \rightarrow m^2 + c^2 n^4 = 0 \Rightarrow m = \pm c n^2$$

$$G_n(t) = A\cos cn^2 + B\sin cn^2 + G_p \quad , \quad G_p = E\sin t$$

$$-E\sin t + c^2 n^4 E\sin t = \frac{2nc^2}{\pi}(-1)^n \sin t$$

$$\Rightarrow E = \frac{2(-1)^n}{n^3\pi(c^2\pi^4 - 1)}$$

$$G_n(t) = A\cos cn^2 + B\sin cn^2 + \frac{2(-1)^n}{n^3\pi(c^2\pi^4 - 1)}\sin t$$

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos cn^2+B_n\sin cn^2+\frac{2(-1)^n}{n^3\pi(c^2\pi^4-1)}\sin t)\sin nx$$

$$v(0,t)=0\Rightarrow A=0$$

تمرین :

- اگر تابع زیر همساز است ، مزدوج همساز آنرا بدست آورید :

$$1: u(x,y)=2x(1-x)$$
$$2: u(x,y)=\sinh x\sin y$$

اگر v مزدوج همساز u از حوزه D باشد آنگاه u– یک مزدوج همساز v در D است و بالعکس. **چون f(z)=u(x,y)+iv(x,y) در D تحلیلی است اگر و فقط اگر –if(z)=v(x,y)-iu(x,y) در D تحلیلی باشد.**

تمرین :

- نشان دهید اگر در حوزه ای v یک مزدوج همساز u و u یک مزدوج همساز v باشد آنگاه u و v باید توابع ثابتی باشند.

تمرین :

- با توجه به معادله لاپلاس در مختصات قطبی

$$r^2u_{rr}(r,\theta)+ru_r(r,\theta)+u_{\theta\theta}(r,\theta)=0$$

نشان دهید که تابع u(r,θ)=Log r در حوزه 0<θ<2π و r>0 همساز است . سپس یک مزدوج همساز v را پیدا کنید .

<u>جواب : v(r,θ)=θ</u>

توابع مقدماتی

تابع نمایی

$$f(z)=e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y$$

$$\frac{d}{dz}e^{z}=e^{z}$$

توابع مثلثاتی

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\quad,\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}=(\cos x+i\sin x)\frac{e^{-y}}{2i}-(\cos x-i\sin x)\frac{e^{y}}{2i}$$

$$=\sin x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+i\cos x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$
$$\Rightarrow \cos z=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$$

مثال $\sin(iy)=i\sinh y\quad,\quad \cos(iy)=\cosh y$

توابع هذلولی گون

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$
$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$
$$\sinh(-z) = -\sinh z \quad , \quad \cosh(-z) = \cosh z$$
$$\sinh(iz) = i \sin z \quad , \quad \cosh(iz) = \cos z$$
$$\sin(iz) = i \sinh z \quad , \quad \cos(iz) = \cosh z$$
$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$
$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$
$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$
$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

تابع لگاریتمی

$$\log z = \log r + i\theta$$
$$r = |z| \quad , \quad \theta = \arg z$$
$$z = re^{i\theta}$$

دنباله اعداد مختلط و نگاشت ها

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$
$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$
$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$
$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$\rho = e^x, \varphi = y$$

$$e^z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi) \quad , \quad \left|e^z\right| = e^x, \arg e^z = y$$

$$e^z \neq 0$$

به ازای هر عدد مختلط

یعنی تحت تبدیل $w=e^{z}$ نقطه $w=0$ نمی تواند تصویر هیچ نقطه ای در صفحه z باشد یا برد تابع نمایی تمام صفحه مختلط است به استثنای مبدا.
از آنجایی که می توان نوشت:

$$\sin y=\sin(y+2\pi)$$
$$\cos y=\cos(y+2\pi)$$
$$e^{z+2\pi i}=e^{x+i(y+2\pi)}=e^{x}[\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)]$$
$$=e^{x}(\cos y+i\sin y)=e^{z}$$

درواقع e^{z} یک تابع چند مقداری یا تابع متناوب با دوره تناوب یک عدد موهومی محض $2\pi i$

$$f(z)=f(z+\alpha)\qquad,\qquad \alpha=2\pi i$$

تمرین : فرض کنید تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در یک حوزه D تحلیلی باشد.بیان کنید چرا توابع

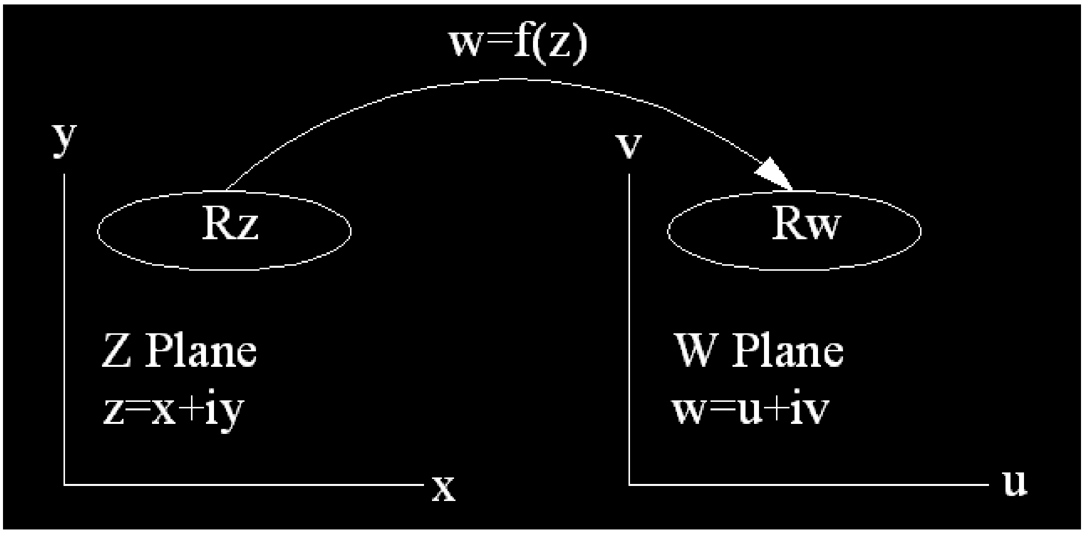
$$U(x,y)=e^{u(x,y)}\cos[v(x,y)]$$
$$V(x,y)=e^{u(x,y)}\sin[v(x,y)]$$

در D همسازند و چرا $V(x,y)$ در واقع یک مزدوج همساز $U(x,y)$ است.

تابع لگاریتمی

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
$$\Rightarrow \log z = \log r + i(\theta + 2k\pi)$$
$$if \qquad k=0 \qquad \theta = \Theta$$
$$\log z = \log r + i\Theta$$

نگاشت بوسیله توابع مقدماتی



ابتدا سه مثال حل می شود:

- انتقال ناحیه به اندازه یک واحد به سمت راست

$$w = z + 1 = x + iy + 1 = (x+1) + iy$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u = x+1 \\ v = y \end{cases}$$

$$w=iz$$
$$w=z_1z_2 \quad , \quad z_1=r_1e^{i\theta_1},z_2=r_2e^{i\theta_2},w=\rho e^{i\varphi}$$
$$\rho=r_1r_2,\varphi=\theta_1+\theta_2$$
$$z_1=i=0+1i \ , \ z_2=z=x+iy \qquad \begin{cases}\theta_1=\pi/2\\ \theta_2=\arg z\end{cases}$$
$$|z_1|=1 \qquad |z_2|=|z|$$
$$\Rightarrow \rho=|z|\times 1=|z|$$
$$\Rightarrow \varphi=\pi/2+\arg z$$

بنابرین $w=iz$ فقط به اندازه $\pi/2$ دوران می دهد.

$$w=\bar{z} \qquad , \quad z=x+iy \qquad \bar{z}=w=x-iy \qquad \begin{cases}u=x\\ v=-y\end{cases}$$

بنابراین $w=\bar{z}$ انعکاس یافته هر ناحیه ای نسبت به محور حقیقی است.

توابع خطی

$$w=z+c \qquad , \qquad \begin{cases}z=x+iy\\ c=c_1+ic_2\end{cases}$$
$$w=u+iv=(x+c_1,y+c_2)$$

طبق این تبدیل ناحیه فقط تحت یک بردار خاص انتقال می یابد.

$$w=Bz \qquad B=be^{i\beta} \quad , \quad z=re^{i\theta}$$
$$w=bre^{i(\beta+\theta)} \qquad \Rightarrow \rho=br \quad , \quad \varphi=\beta+\theta$$

طبق این تبدیل ناحیه ابتدا حول مبدا به اندازه $B\ \arg B = \beta$ دوران یافته و سپس یک انبساط یا انقباض با ضریب $b = |B|$ انجام می شود.

اگر $|B|$ برابر یک باشد این تبدیل فقط یک دوران است و اگر $|B| \neq 1$ باشد این تبدیل هم دوران و هم تغییر مقیاس را شامل می شود.

$$w = Bz + c$$

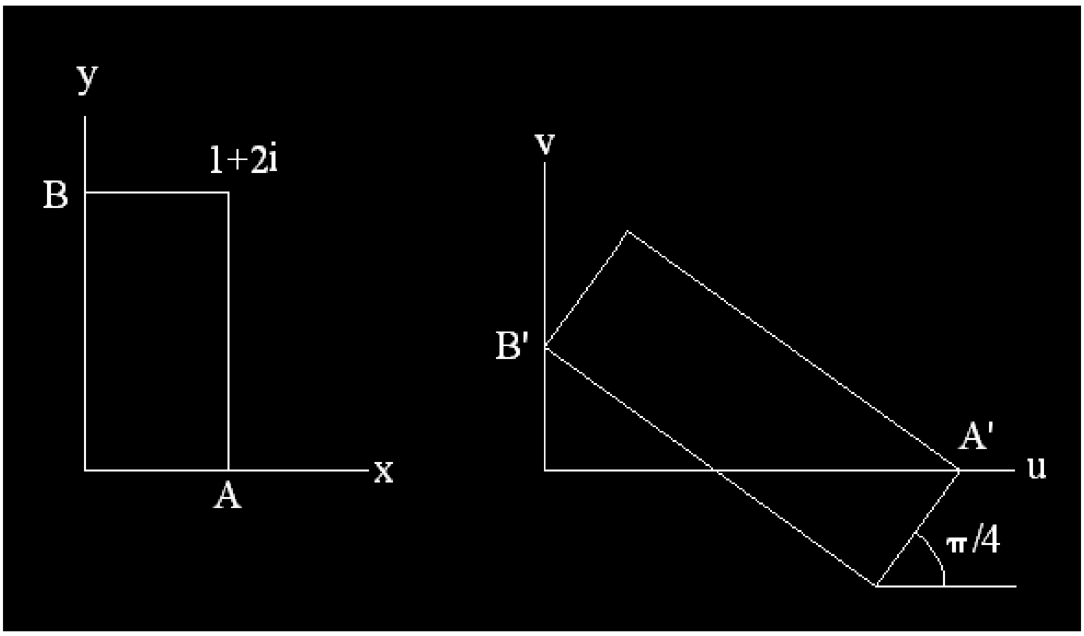
بنابراین این تبدیل یک دوران و یک انبساط یا انقباض و سپس یک انتقال می باشد.

مثلا با تبدیل $w = (1+i)z + 2 - i$ ناحیه مستطیلی زیر

$$Z = (1+i)z \qquad , \qquad w = Z + 2 - i$$

1- دوران به اندازه $\pi/4$ وانبساطی با ضریب $\sqrt{2}$ $\qquad 1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

2- انتقال با بردار $2 - i$



$w=\frac{1}{z}$ تابع

این تبدیل یک تناظر یک به یک بین نقاط نا صفر w, z برقرار می کند.

$$z.\bar{z}=|z|^2 \qquad\qquad Z=\frac{z}{|z|^2}=\frac{1}{\bar{z}} \quad , \quad w=\overline{Z}$$

$$\downarrow$$

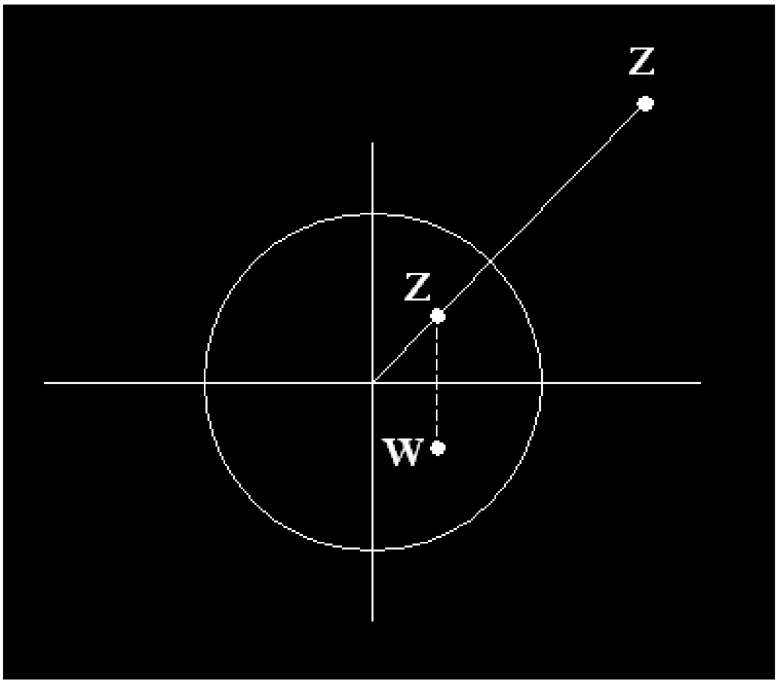
انعکاس نسبت به دایره $|z|=1$

$$\arg Z=\arg z=\frac{\arg z}{\arg\left(|z|^2\right)}=\arg z-\arg\left(|z|^2\right)=\arg z$$

$$|Z|=\frac{|z|}{\left||z|^2\right|}=\frac{|z|}{|z|.|z|}=\frac{1}{|z|}$$

یعنی نقاط خارج دایره $|z|=1$ بر روی نقاط نا صفر داخل آن نگاشته می شود و نقاط نا صفر داخل دایره $|z|=1$ بر روی نقاط خارج آن نگاشته می شود.

و البته هر نقطه روی دایره بر روی خود همان دایره می باشد.
اولین تبدیل فقط یک انعکاس نسبت به محور حقیقی است.



تبدیل نقطه صفر نقطه بی نهایت و تبدیل نقطه بی نهایت نقطه صفر می باشد.

یعنی در این تبدیل آرگومان قرینه و قدرمطلق (اندازه) معکوس می شود.

یا به عبارت دیگر این تبدیل یک انعکاس دایره ای نسبت به دایره واحد و یک انعکاس آینه ای نسبت به خط افق انجام می دهد.

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$z=\frac{1}{w}=\frac{1}{u+iv}=\frac{u}{u+iv}+i\frac{-v}{u+iv}$$

$$u^2+v^2=c_1^2=\frac{x^2}{\left(x^2\ +y^2\right)^2}+\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$$
$$x^2+y^2=\left(\frac{1}{c_1}\right)^2$$
$$x^2+y^2=c_2^2=\frac{u^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}+\frac{v^2}{\left(u^2+v^2\right)}=\frac{u^2+v^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}=\frac{1}{u^2+v^2}$$

$$\Rightarrow u^2+v^2=\left(\frac{1}{c_2}\right)^2$$ دایره

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

با جایگذاری

$$a\left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right)+\frac{bu}{u^2+v^2}-$$

$$-\quad \frac{cv}{u^2+v^2}+d\ =0$$

$$\Rightarrow\ d\left(u^2+v^2\right)+bu\ -cv\ +a=0$$

چهار حالت بوجود می آید :

-1 $d \neq 0, a \neq 0$ هر دایره غیر مار بر مبدا مختصات به یک دایره غیر مار بر مبدا مختصات

-2 $d = 0, a \neq 0$ هر دایره گذرنده بر مبدا مختصات به یک خط غیر مار بر مبدا مختصات

-3 $d \neq 0, a = 0$ هر خط راست غیر مار بر مبدا مختصات به یک دایره مار بر مبدا

-4 $d = 0, a = 0$ هر خط راست مار بر مبدا به یک خط راست مار بر مبدا نگاشته می شود.

مثال:

$$x = c_1 = \frac{-d}{b} \quad , \quad a = c = 0$$

$$d\left(u^2 + v^2\right) + bu = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{b}\left(u^2 + v^2\right) + u = 0$$

$$\Rightarrow -c_1\left(u^2 + v^2\right) + u = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 + v^2 - \frac{u}{c_1} = 0$$

دایره ای که در مبدا بر محور **V** مماس است.

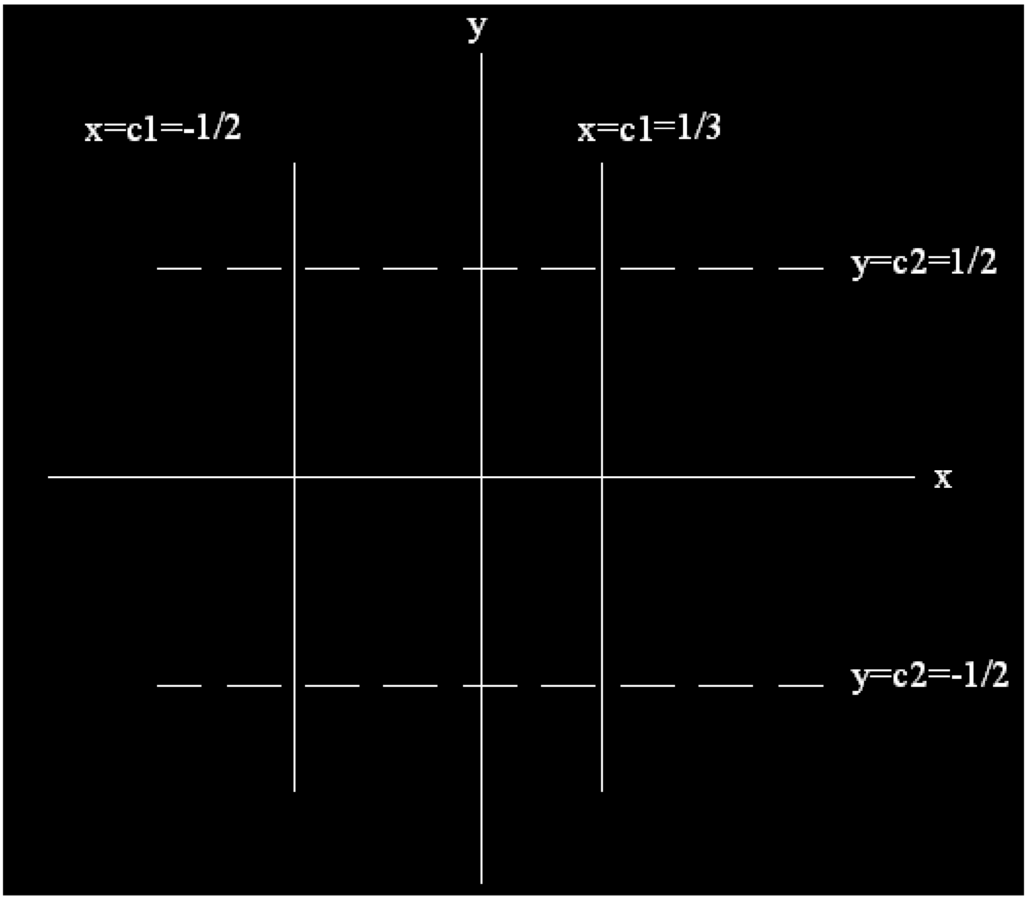
$$u^2 - \frac{u}{c} + \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2 \Rightarrow \left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2$$

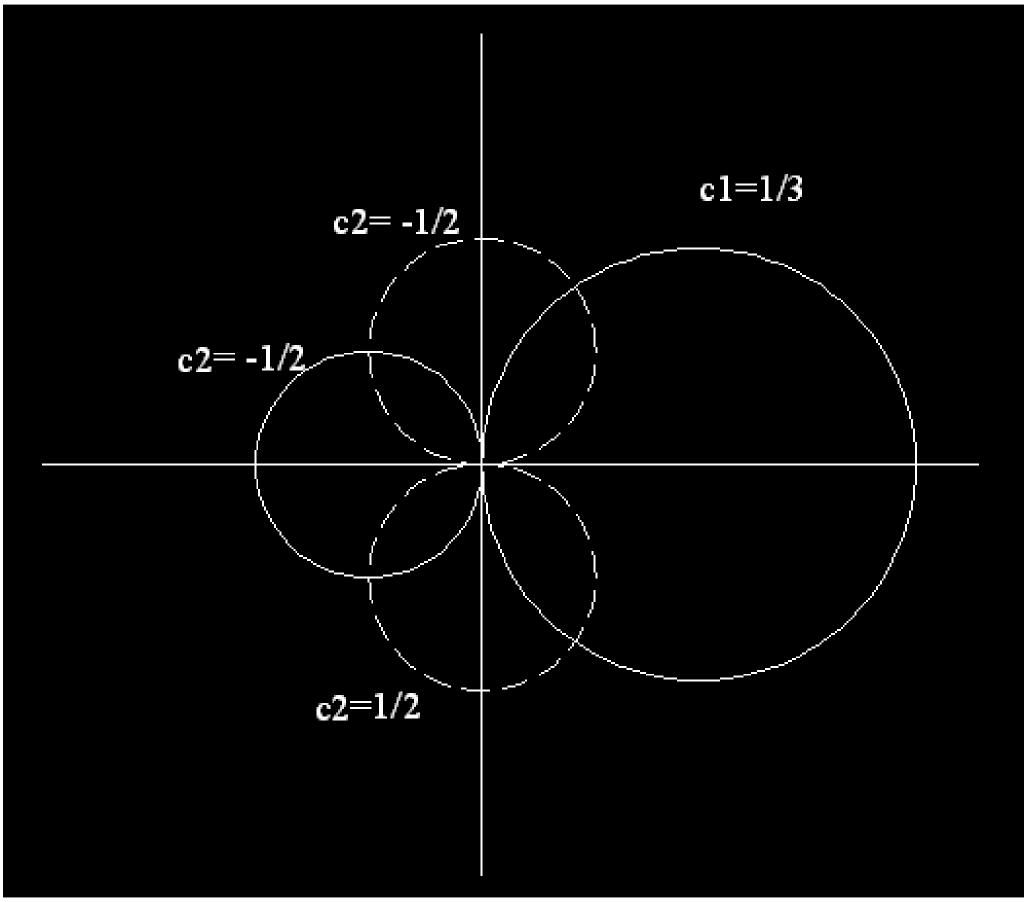
شعاع $\frac{1}{2c_1}$, مرکز $\left(\frac{1}{2c_1}, 0\right)$

$$y=c_2 \qquad \Rightarrow \qquad u^2+v^2+\frac{v}{c_2}=0$$

دایره ای که در مبدا بر محور U مماس می شود.

$$\text{مرکز} \quad \left(0,\frac{-1}{2c_1}\right) \qquad , \qquad \text{شعاع} \quad \frac{1}{2c_2}$$





تصویر نیم صفحه $x > c_1$ $\quad (c_1 > 0)$ ناحیه $\quad \dfrac{u}{u^2+v^2} > c_1$

یا $\quad \left(u - \dfrac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 < \left(\dfrac{1}{2c_1}\right)^2$

مثال : تبدیل ناحیه نیم صفحه $x > 0$ **تحت تبدیل** $w = iz + i$ **را بدست آورید.**
جواب $v > 1$

مثال : تصویر نوار نیم متناهی $\begin{cases}0<y<2\\0<x\end{cases}$ تحت تبدیل $w=iz+1$ را بدست آورید.

جواب $v>0 \quad , \quad -1<u<1$

مثال : نشان دهید تصویر $\begin{cases}x<c_1\\c_1<0\end{cases}$ تحت تبدیل $w=1/z$ داخل یک دایره است و اگر $c_1=0$ تصویر چیست ؟

مثال : نشان دهید تصویر نیم صفحه $\begin{cases}y>c_2\\c_2>0\end{cases}$ تحت تبدیل $w=1/z$ داخل یک دایره است.

مثال : تصویر ربع صفحه $\begin{cases}x>1\\y>0\end{cases}$ را تحت تبدیل $w=1/z$ بدست آورید.

$$\left|w-1/z\right|<1/2 \qquad , \qquad v<0$$

مثال : نشان دهید تبدیل $w=i/z$ دایره و خط را به دایره و خط تبدیل می کند و پس از آن تصویر نوار نیم متناهی $\begin{cases}0\le y\le 1\\x\ge 0\end{cases}$ را بدست آورید

$$w=\rho e^{i\varphi} \qquad , \qquad 0\le\varphi\le\pi/2$$

$$\rho\ge\cos\varphi$$

تبدیل خطی کسری

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad ad-bc\neq 0$$

تبدیل خط کسری – تبدیل موبیوس – تبدیل دو خطی

If $c=0 \rightarrow$ تبدیل خطی

$c\neq 0$ If

$$w=\frac{a}{c}\left(\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{c}{d}}\right)=\frac{a}{c}\left(\frac{z+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}\right)=\frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}\right)=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}.\frac{1}{cz+d}$$

$$W=P+\frac{Q}{Z+R}$$

شرط $ad-bc\neq 0$ **باید موجود باشد.**

تبدیل دو خطی

$$Azw+Bz+Cw+D=0$$

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a}$$

$$Z=cz+d \quad , \quad W=\frac{1}{Z} \quad , \quad w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}W$$

فقط یک تبدیل خطی کسری موجود است که سه نقطه مفروض و متمایز $z_1 \,,\, z_2 \,,\, z_3$ را به ترتیب بر روی سه نقطه مشخص و متمایز w_1, w_2, w_3 می نگارد.

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

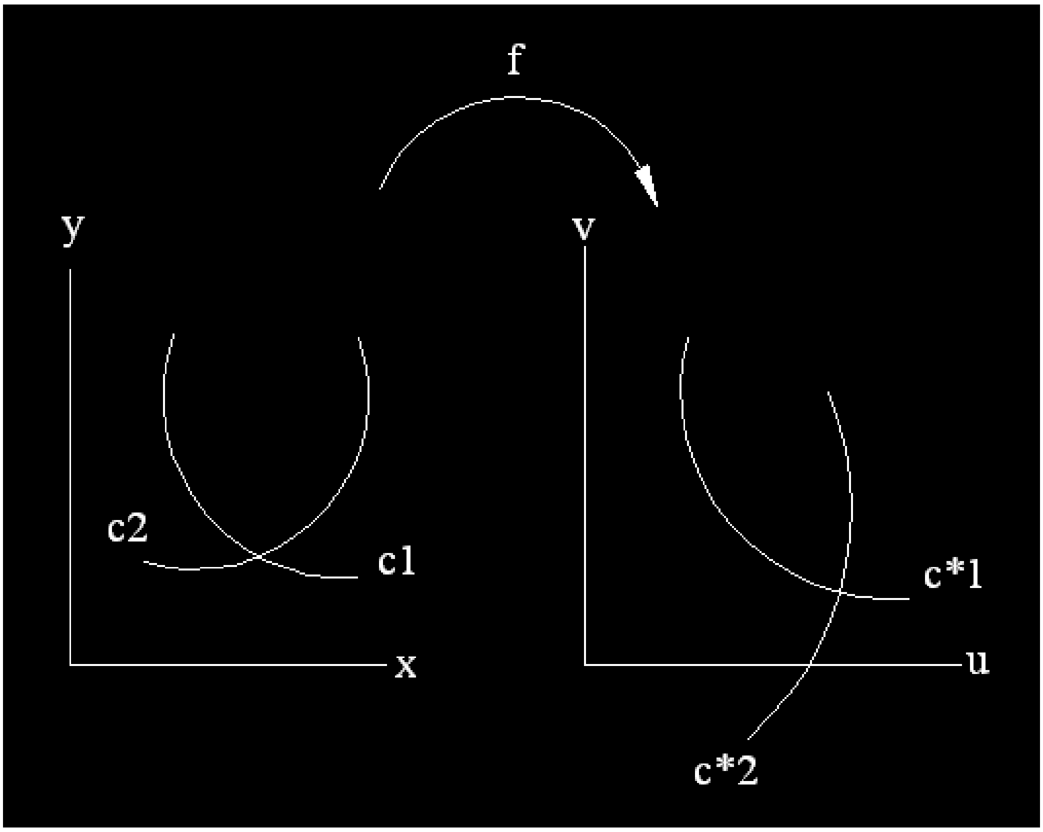
$$(z-z_3)(w-w_1)(z_2-z_1)(w_2-w_3)=(z-z_1)(w-w_3)(z_2-z_3)(w_2-w_1)$$
$$z=z_1 \to w=w_1$$
$$z=z_3 \to w=w_3$$
$$z=z_2 \to (w-w_1)(w_2-w_3)=(w-w_3)(w_2-w_1) \Rightarrow w=w_2$$

اگر w_2 بی نهایت باشد w_2 را به $\frac{1}{w_2}$ تبدیل و سپس بعد از برداشتن کسرها در صورت و مخرج $w_2=0$ قرار دهیم.

نگاشت همدیس

نگاشتی که زاویه را ثابت نگه دارد همدیس نامیده می شود.(با حفظ جهت)

نگاشت همدیس در z_0 $\quad\Leftrightarrow\quad$ $f^{i}(z_0)\neq 0$



اگر تابعی هارمونیک باشد (یعنی تبدیل همدیس باشد) و همساز نیز باشد یعنی در معادله لاپلاس صدق کند تصویر آن نیز همساز است (یعنی در لاپلاس صدق می کند)

نگاشت

$$z = x + iy \qquad , \qquad w = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy \qquad\qquad w = z^2$$

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ r \le 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ r^2 = \rho \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad w = z^n$$

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ r \ge 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ r^2 = \rho = \ge 0 \end{cases}$$

هذلولی $x^2 - y^2 = c_1 \rightarrow u = c_1$ خط

هذلولی $2xy = c_2 \rightarrow v = c_2$ خط

$$w = z^n \quad , \quad \rho e^{i\varphi} = r^n e^{in\theta}$$

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/n \\ r \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ \rho \ge 0 \end{cases}$$

نگاشت $w = e^z$

$$w = e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

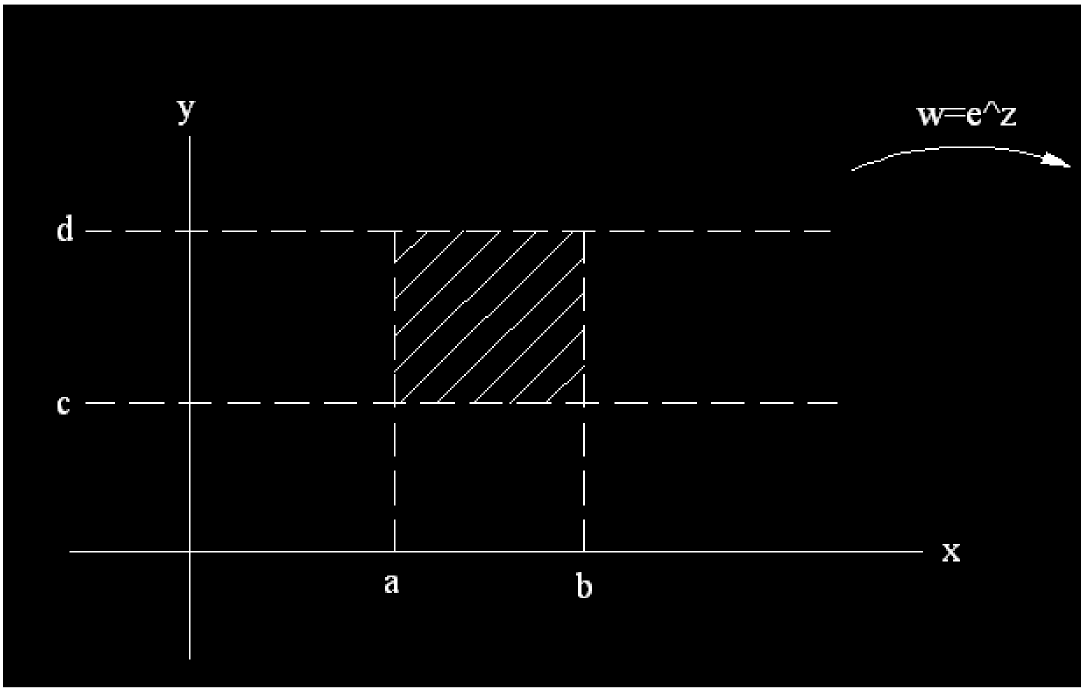
$u = e^x \cos y$ $\qquad w' = e^z \neq 0$ همدیس است

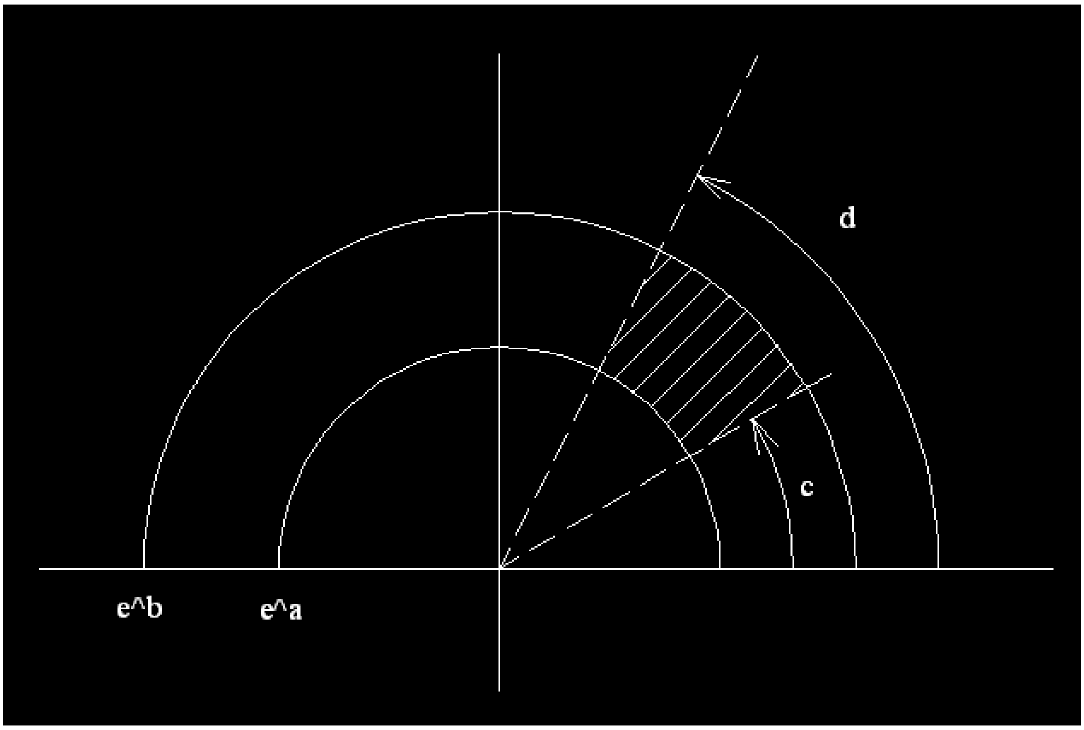
$v = e^x \sin y$

$$\rho = e^x \quad , \quad \varphi = y$$

$$\begin{cases} x = c \rightarrow \rho = e^c & \text{دایره} \\ y = d \rightarrow \varphi = d & \text{خط شعاعی} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Rectangular Zone} \\ a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^a \le \rho \le e^b \\ c \le \varphi \le d \end{cases}$$ ناحیه بین دو دایره و خطوط شعاعی


y
w=e^z
d
c
x
a
b


d
c
e^b
e^a

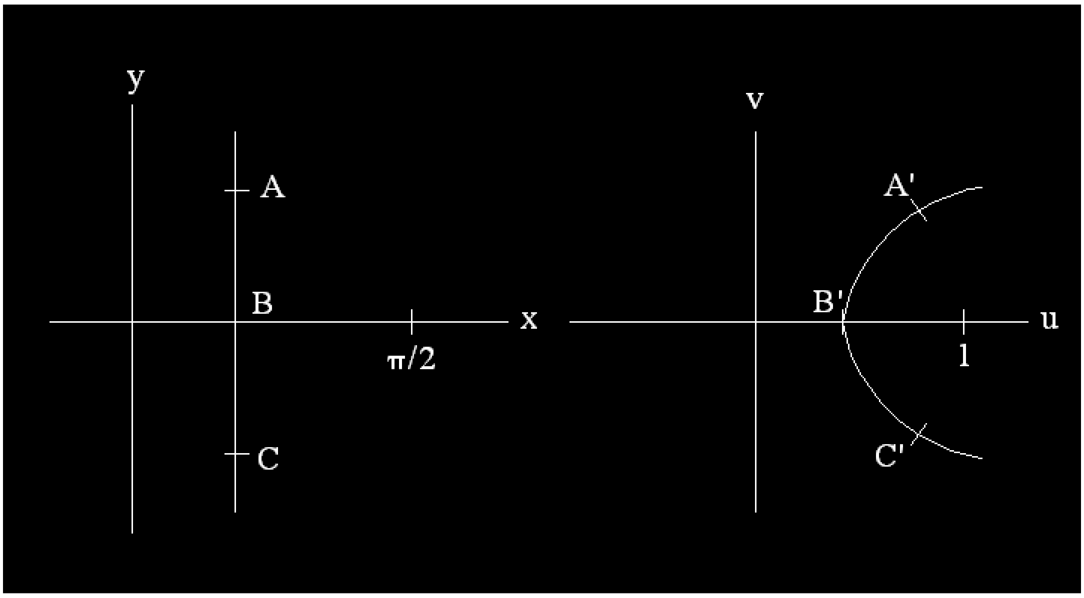
تبدیل $w=\sin z$

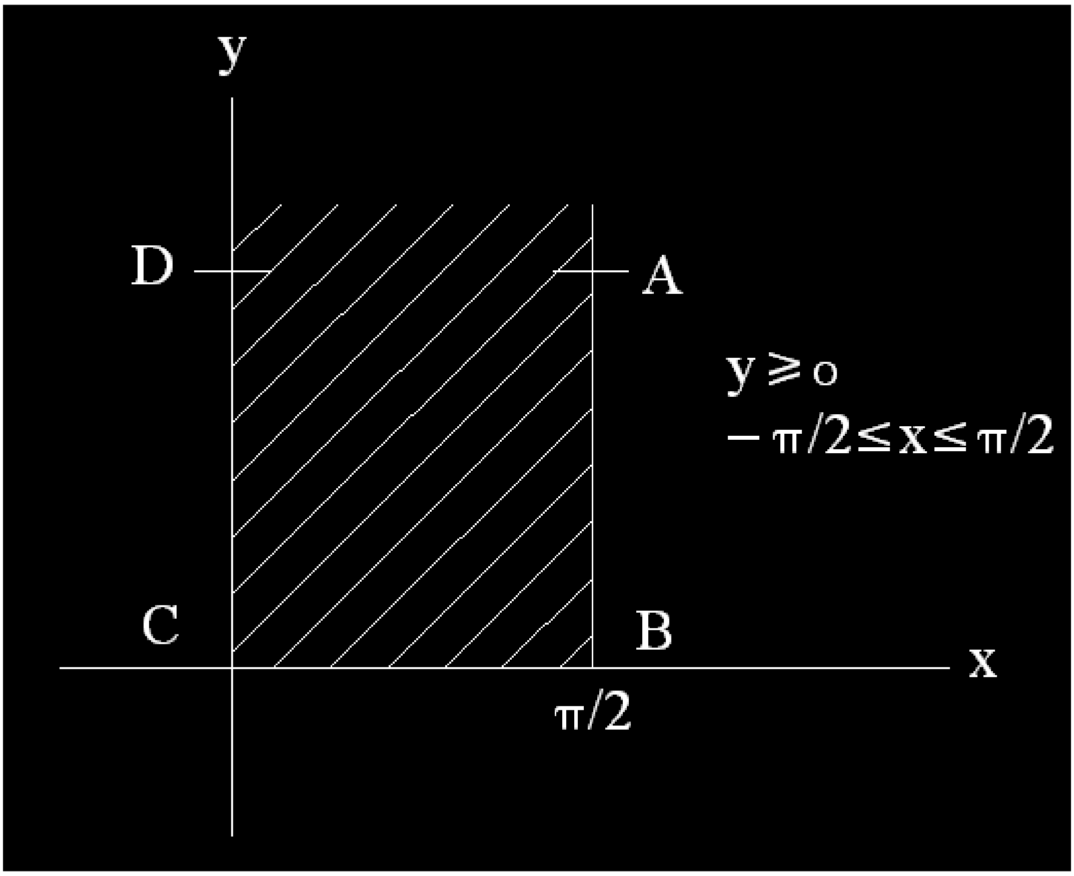
$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$
$$u=\sin x\cosh y, v=\cos x\sinh y$$

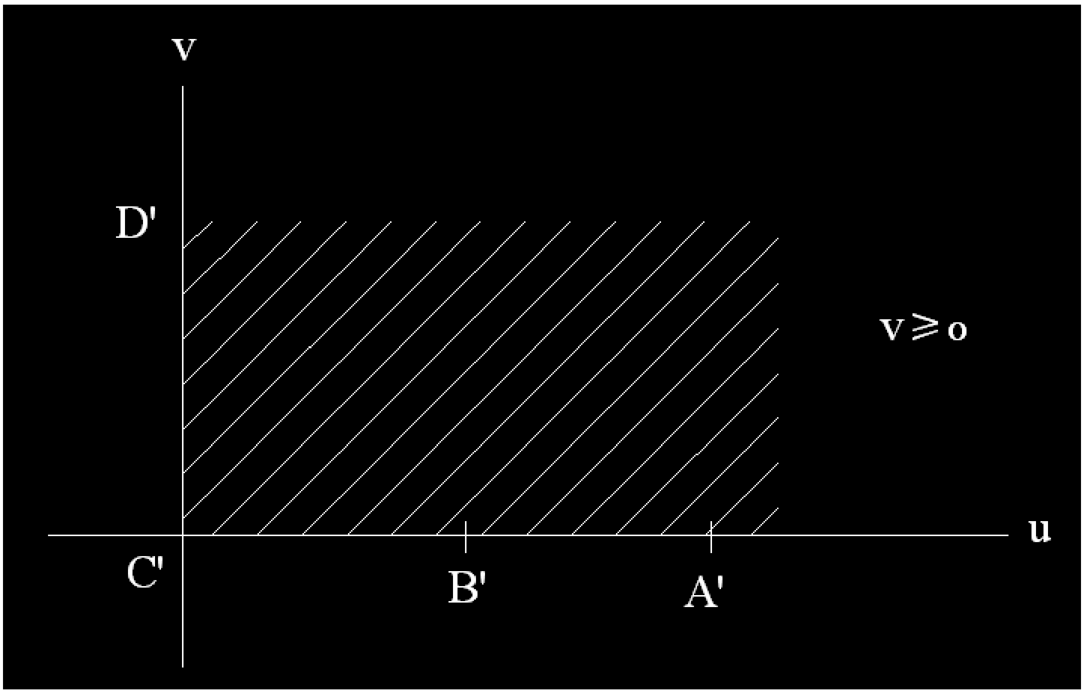
$$\begin{cases} 0<c<\pi/2 \\ x=c \end{cases} \qquad u=\sin c\cosh y \qquad v=\cos c\sinh y$$

$$\frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1$$

کانون های $(+1,0)$ $(-1,0)$

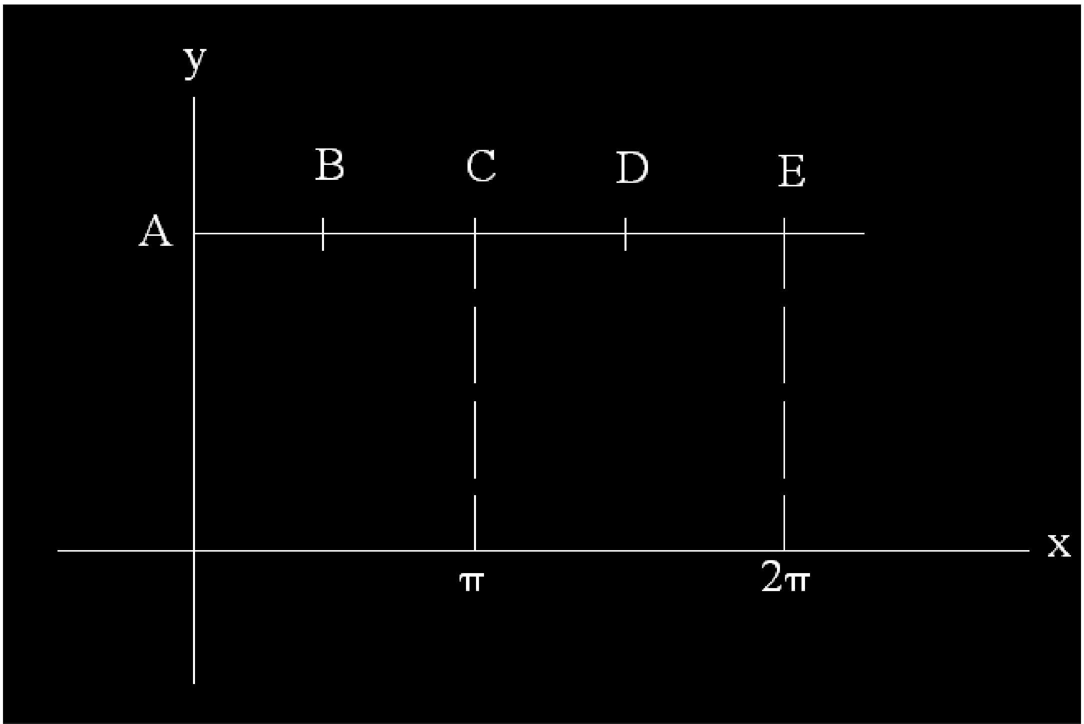

y
A
B
C
x
π/2
v
A'
B'
C'
u
1

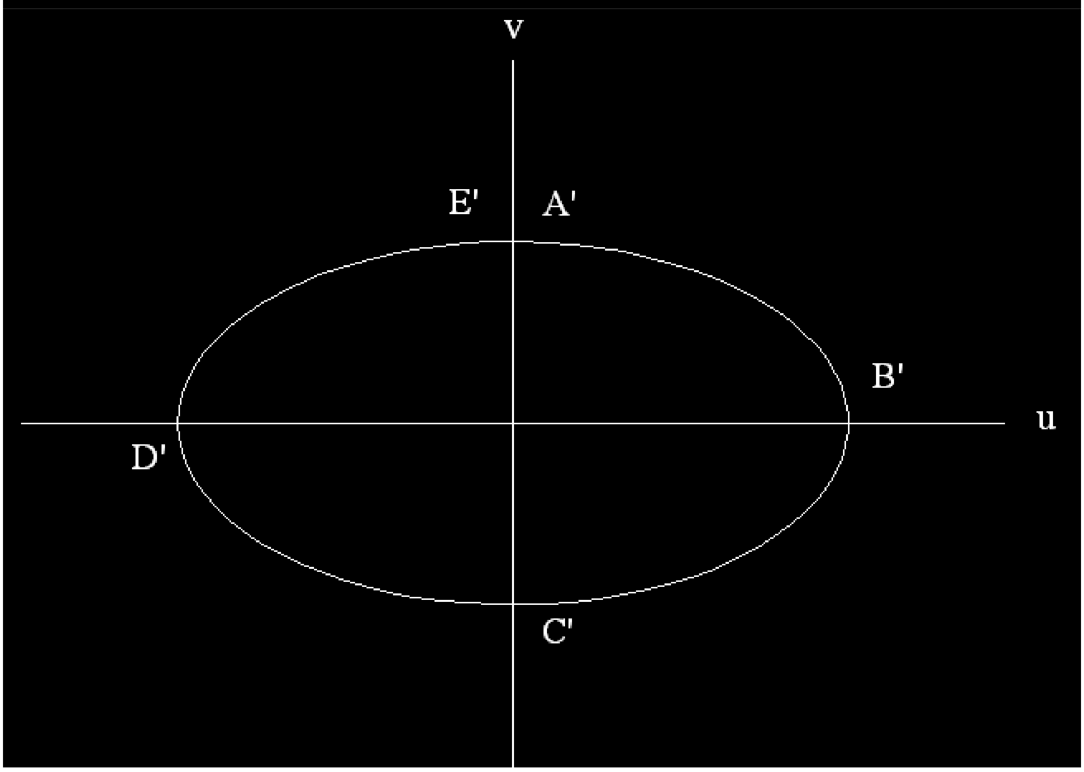

y
D
A
y ≥ o
−π/2≤x≤π/2
C
B
x
π/2



$$y = c \quad \Rightarrow \quad u = \sin x \cosh c \quad , \quad v = \cos x \sinh c$$

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1$$





نگاشت $w = \cos z$

$$\cos z = \sin\left(z + \pi/2\right)$$
$$Z = z + \pi/2 \quad , \quad w = \sin Z$$

نگاشت $w = \sinh z$

$$w = \sinh z \quad , \quad \sinh z = -i\sin(iz)$$
$$Z = iz \quad , \quad W = \sin Z \quad , \quad w = -iW$$

نگاشت $w = \ln z$

$$z = re^{i\theta} \quad , \quad w = u + iv$$
$$w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) = u + iv$$
$$u = \ln r \quad , \quad e^{u} = r \quad , \quad v = \theta + 2k\pi$$

لگاریتم یک تابع متناوب است.

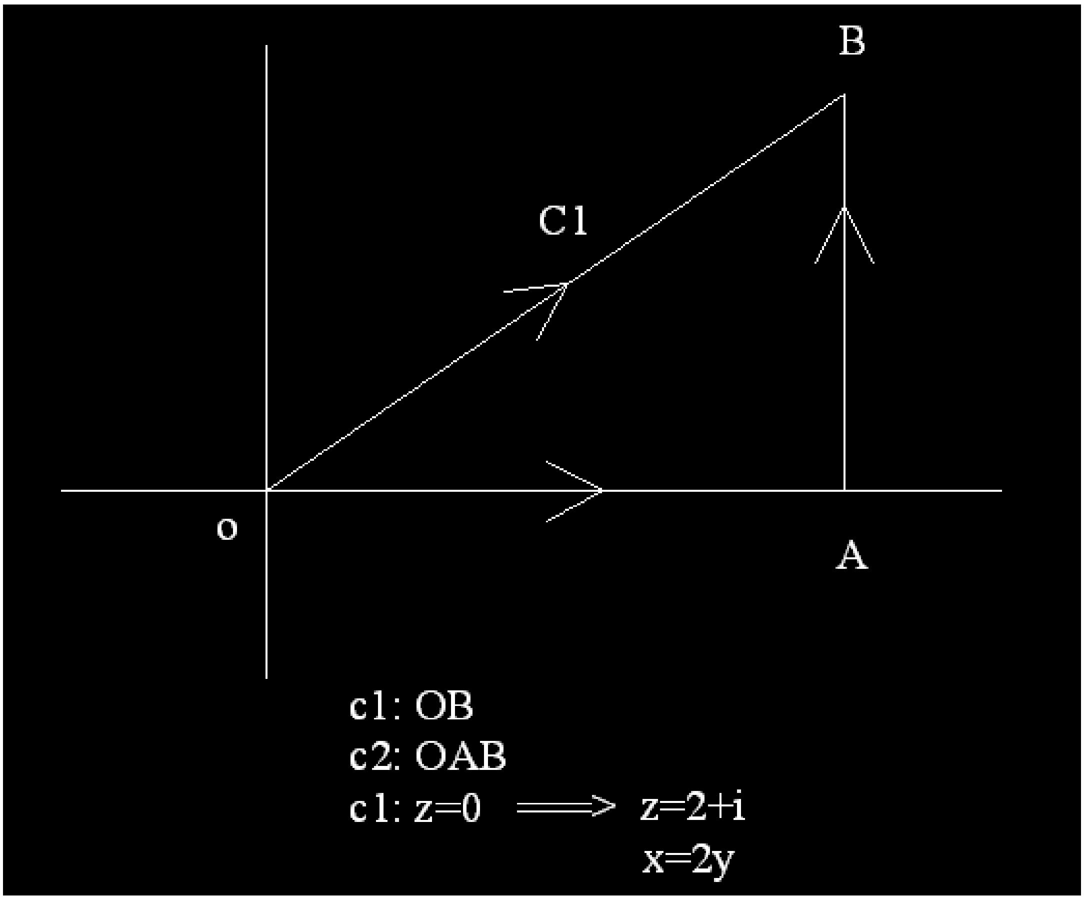
$$\ln z = \ln r + i\theta \qquad -\pi \le \theta \le \pi$$
$$\lim_{z \to z_0^-} \ln z = \ln|z_0| - i\pi \quad , \quad \lim_{z \to z_0^+} \ln z = \ln|z_0| + i\pi$$

در سایر نقاط شرط های کشی ریمان صدق می کند و فقط این تابع روی خط π تحلیلی نیست.

انتگرالگیری از توابع مختلط

انتگرالگیری روی خط:

$$I_1 = \int_{c_1} z^2 dz$$


B
C1
o
A
c1: OB
c2: OAB
c1: z=0 ⟹ z=2+i
x=2y

$$z=x+iy$$
$$z(y)=2y+iy \qquad 0\le y\le 1$$
$$z^2=x^2-y^2+i2xy=3y^2+i4y^2$$
$$I_1=\int_0^1\left(3y^2+i4y^2\right)(2+i)dy$$
$$=(3+4i)(2+i)\int_0^1 y^2dy=\frac{2}{3}+\frac{11}{3}i$$
$$I_2=\int_{c_2} z^2dz=\int_{OA} z^2dz+\int_{AB} z^2dz$$
$$OA: z(x)=x \qquad 0\le x\le 2$$
$$AB: z(y)=2+iy \qquad 0\le y\le 1$$
$$I_2=\int_0^2 x^2dx+\int_0^1(2+iy)^2\,idy$$
$$=\frac{8}{3}+i\left[\int_0^1\left(4-y^2\right)dy+4i\int_0^1 ydy\right]=\frac{2}{3}+\frac{11}{3}i$$
$$I_1=I_2 \quad\rightarrow\quad \oint OABO=I_2-I_1=0$$

علت این مساله تحلیلی بودن تابع $f(z)=z^2$ روی مرز و داخل مرز می باشد.

مثال

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z}dz \qquad z=e^{i\theta},\quad r=1 \qquad \Rightarrow\int\frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta=2\pi i$$
$$dz=ie^{i\theta}d\theta \qquad |z|=1$$

مثال

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{2i\theta}} d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0$$

مثال دایره c_0

$$z - z_0 = r_0 e^{i\theta} \qquad \Rightarrow \qquad dz = ir_0 e^{i\theta} d\theta$$

$$\int_{c_0} f(z)dz = ir_0 \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r_0 e^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq 1 \\ 2\pi i & , \quad n = 1 \end{cases}$$

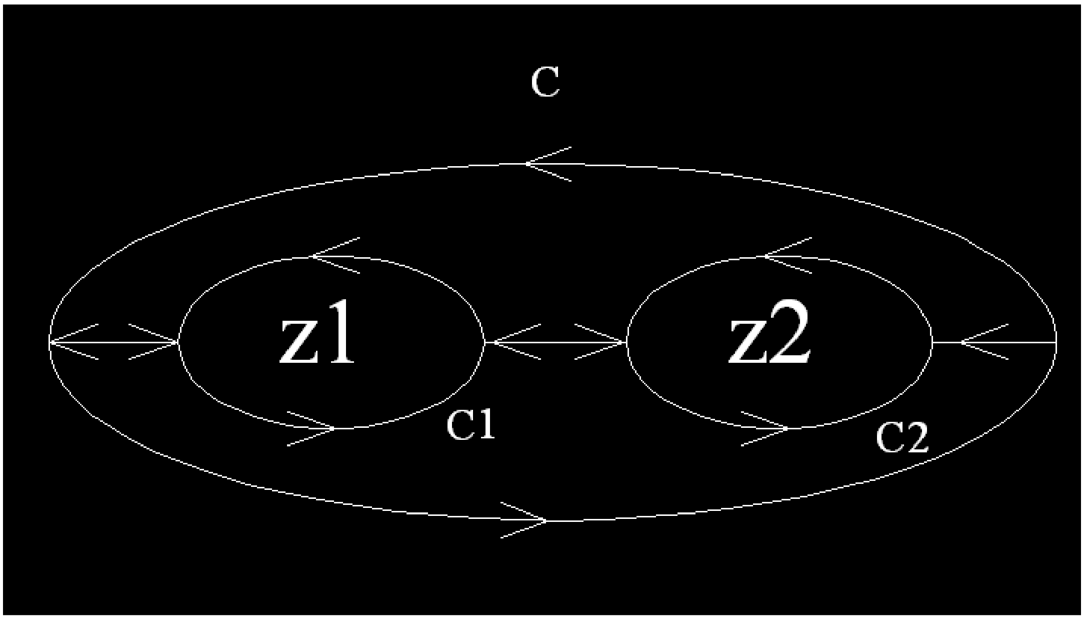
قضیه انتگرال کشی

هرگاه $f(z)$ بر ناحیه ای (هم بند و ساده) تحلیلی و $f'(z)$ پیوسته باشد آنگاه به ازای هر مسیر بسته مثلثاتی C واقع در ناحیه انتگرال برابر صفر است

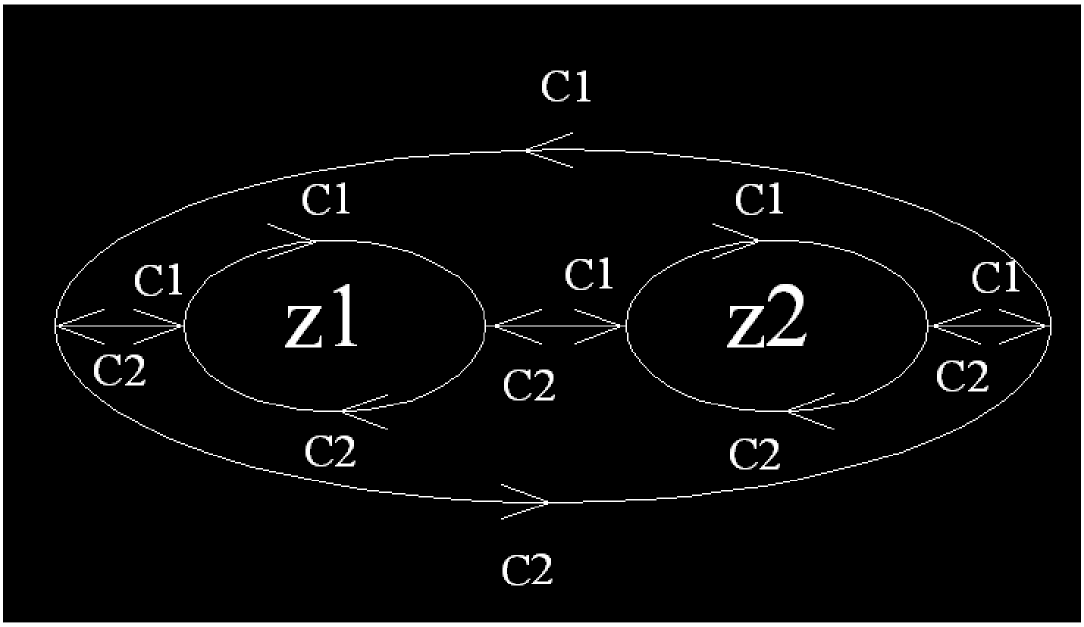
$$\oint_c f(z)dz = 0$$

همچنین هرگاه $f(z)$ در ناحیه ای به جز یک سری نقاط خاص تحلیلی باشد می توان نوشت

$$\oint_c f(z)dz = \oint_{c_1} f(z)dz + \oint_{c_2} f(z)dz$$



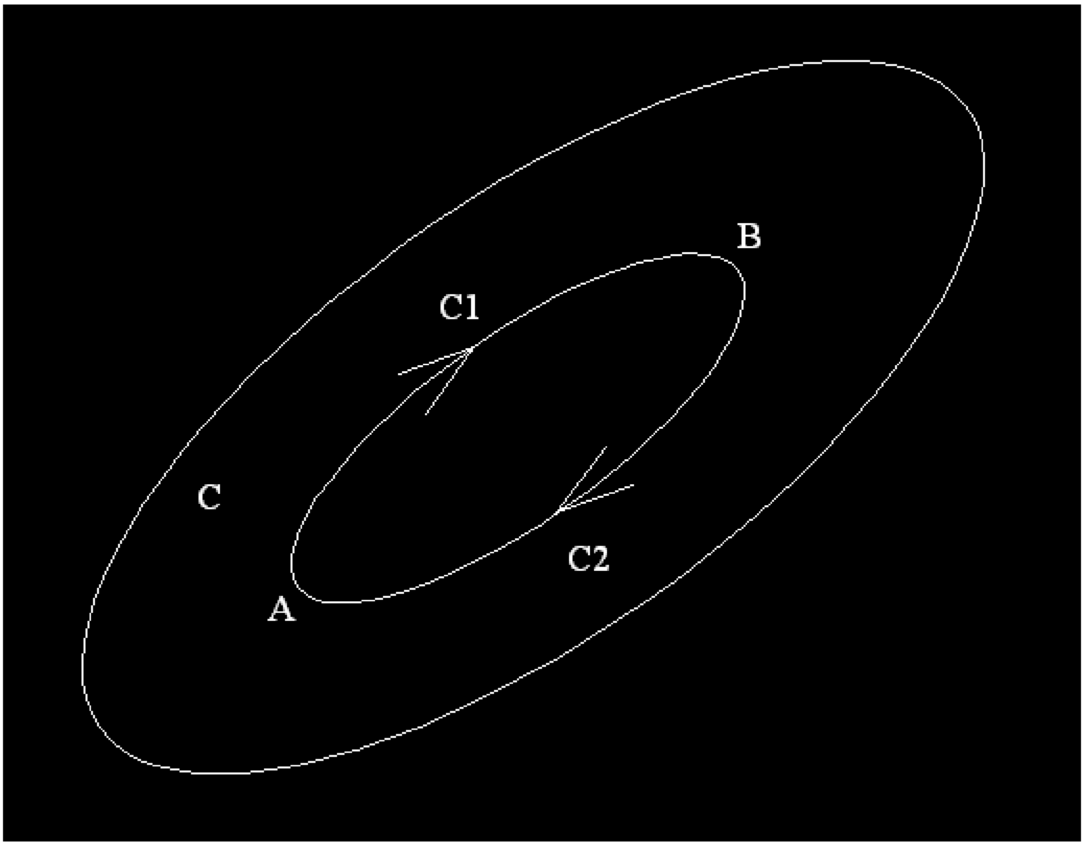
البته این قضیه را به اینصورت نیز می توان بیان نمود:



$$\oint_{c_1} f(z)dz = 0$$

$$\oint_{c_2} f(z)dz = 0$$

یعنی می توان بین دو نقطه دو مسیر تعریف نمود و گفت:



چون c_2, c_1 یک مسیر بسته را تشکیل می دهند :

$$\oint_c f(z)dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{c1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{c1} f(z)dz = -\int_{c_2} f(z)dz$$

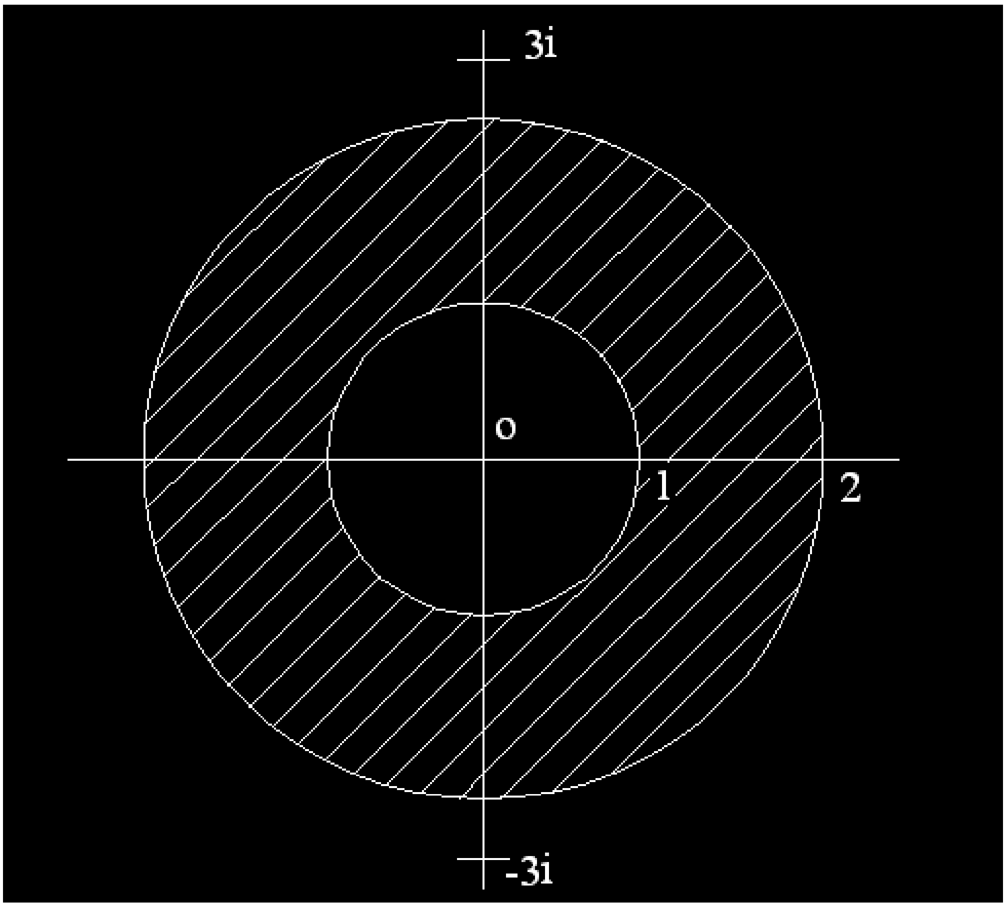
قضیه سه (فرمول انتگرال کشی)

در این قضیه $f\left(z\right)$ در مرز C تحلیلی است.
C مسیری در جهت مثلثاتی

$$\oint_c \frac{f\left(z\right)}{z-z_0}dz = 2\pi i f\left(z_0\right)$$

مثال

$$\oint_B \frac{dz}{z\left(z^2-2\right)} = 0$$



$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(z^2-2\right)} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z^2-z}}{z} dz = 2\pi i \frac{1}{0-2} = -\pi i$$

قضیه چهار (فرمول انتگرال کشی)

$$f'\left(z_0\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^2} dz$$

$$f^{(n)}\left(z_0\right) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}} dz \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{e^{(z+1)} \cos z}{z^4} \quad \rightarrow \quad f(z) = e^{(z+1)} \cos z$$

$$f'(z) = e^{z+1}\left(\cos z - \sin z\right) \quad , \quad f''(z) = e^{z+1}\left(\cos z - \sin z - \sin z - \cos z\right)$$

$$= -2e^{z+1} \sin z \quad ,$$

$$f'''(z) = -2e^{z+1}\left(\sin z + \cos z\right)$$

$$\Rightarrow f'''(z_0=0)=-2e^1(1)=-2e$$

$$\xrightarrow{n=3} \quad -2e=\frac{3!}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{e^{z+1}\cos z}{z^4}dz$$

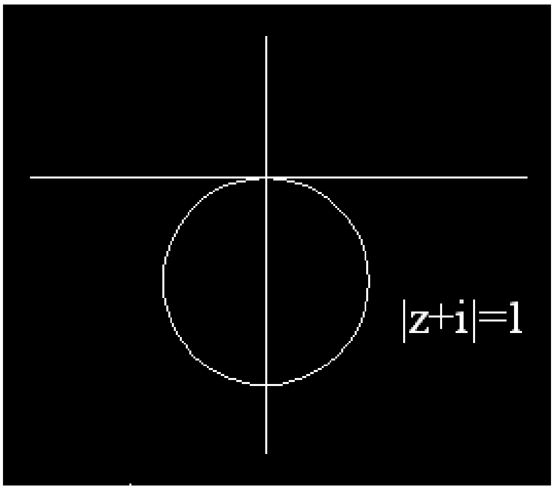
$$\Rightarrow I=\frac{2\pi i}{3!}(-2e^1)$$

مطلوب است تعیین انتگرال های روی دو مسیر دایره ای نشان داده شده :

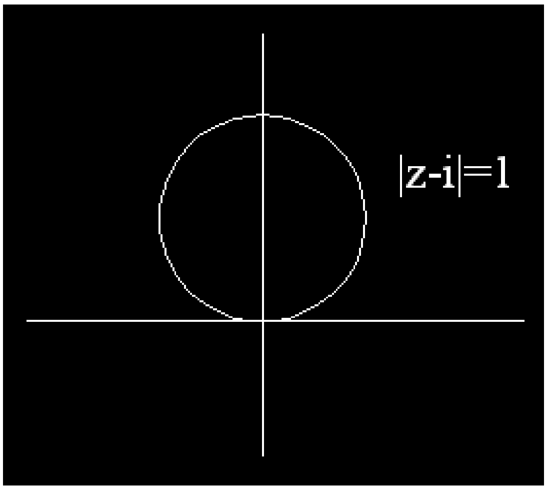
$$I=\int\frac{dz}{z^2+1} \qquad |z+i|=1 \quad , \quad |z-i|=1$$

$$I=\frac{1}{2i}\int\frac{dz}{z-i}-\frac{1}{2i}\int\frac{dz}{z+i}=$$

$$=0-\frac{1}{2i}\int\frac{dz}{z+i}=-\frac{1}{2i}2\pi i(1)=-\pi$$

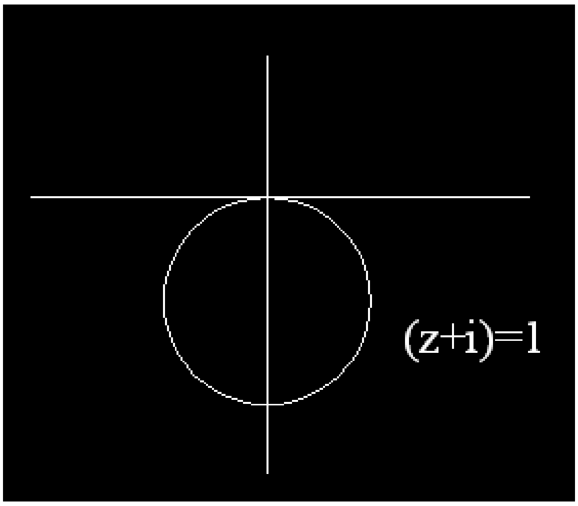


$$I=\frac{1}{2i}\int\frac{dz}{z-i}-0=\frac{1}{2i}(2\pi i)(1)=\pi$$



راه یگر استفاده از قضیه انتگرال کشی

$$\int\frac{\frac{1}{(z-i)}}{z+i}dz=2\pi i\frac{1}{-i-i}=-\pi$$



$$I=\int_{|z|=2}\frac{zdz}{(9-z^2)(z+i)}$$

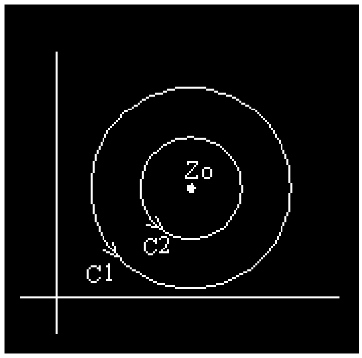
$$z_0=-i \quad , \quad (-i)^2=-1\Rightarrow I=2\pi i f(z_0)=2\pi i\frac{-i}{(9-(-1))}=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$$

قضیه مانده ها :

اگر $f(z)$ بر مرز C تحلیلی ودر درون آن به جز در نقاط $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ تحلیلی باشد آنگاه می توان نوشت :

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{z=z_k} \mathrm{Res} f(z) \qquad k=1,2,3,\dots\dots,n$$

سری لوران :



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}} (n=0,1,2,\dots)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{-n+1}} (n=0,1,2,\dots)$$

$$\mathrm{Res}: b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)dz$$

مثال

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz$$

با استفاده از بسط تیلور حول $z=1$

$$\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}=\frac{e^{-1}}{(z-1)^2}-\frac{e^{-1}}{(z-1)}+e^{-1}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n-2}}{n!}$$

$$=-\frac{2\pi i}{e}$$

مثال

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z^2}}\,dz=0$$

اگر قطب ساده باشد :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\frac{b_1}{z-a}$$

$$b_1=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}\quad\Rightarrow\quad b_1=\left(\frac{g(z)}{h'(z)}\right)_{z=a}$$

مثال

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{2}{z-1}+\frac{4}{z+2}$$

دو عبارت دیگر در صفر تحلیلی اند یعنی فقط سری تیلور دارند و ضرایب با توان منفی آنها صفر است

$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z)=1 \quad , \quad \underset{z=1}{\operatorname{Res}} f(z)=2 \quad , \quad \underset{z=-2}{\operatorname{Res}} f(z)=4$$

برای دو عبارت دیگر نیز چنین توضیحی وجود دارد.

- اگر قطب ساده نباشد (قطب از درجه N باشد)

برای بدست آوردن مانده ابتدا در $(z-a)^n$ ضرب کرده و N-1 بار مشتق می گیریم و بعد در $\frac{1}{(N-1)!}$ ضرب کرده و بعد $z=a$ قرار می دهیم.

مثال

$$\int \frac{1}{(z^2-1)^2}dz=\int \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}dz$$

در $z=1$ مانده را می خواهیم

$N=2$

$$\underset{z=1}{\operatorname{Res}} \quad \frac{1}{(z^2-1)^2}=\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right)'_{z=1}\times\frac{1}{(2-1)!}=\frac{-1}{4}$$

چگونگی تشخیص مرتبه قطب

مخرج و مشتق های تابع تا $N-1$ در $z=a$ صفر می شوند (مشتق N ام در $z=a$ صفر نمی شود) قطب از مرتبه N ام است.

مثلا تابع $\frac{\sin z}{z^2}$ در نقطه صفر دارای قطب مرتبه اول است.

$$\int \frac{z^2+1}{e^z \sin z} dz = 2\pi i(b_1)$$

$\frac{z^2+1 / e^z}{\sin z}$ مخرج در صفر ، صفر است و مشتق اول مخرج در صفر ، صفر نیست بنابراین قطب از مرتبه اول است.

$$b_1 = \operatorname{Res} \left. \frac{z^2+1 / e^z}{\sin z} \right|_{@\, z=0} = \left(\frac{z^2+1 / e^z}{\cos z} \right)_{z=0} = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{z^2+1}{e^z \sin z} dz = 2\pi i$$

تمرین :

$$\int \frac{z^2+1}{z \sin z} dz = ?$$

قطب از درجه 2 ، ابتدا در z^2 ضرب کرده و یکبار مشتق گرفته و $z=0$ قرار می دهیم.

مثال

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{2}{z-1}+\frac{4}{z+2}$$

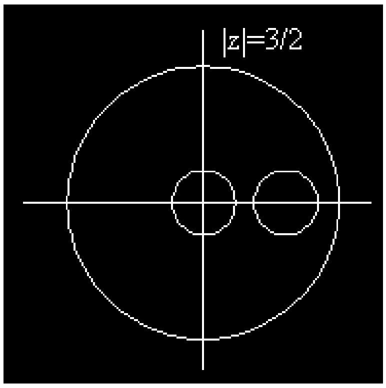
$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz=2\pi i(1)=2\pi i \quad , \quad \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} f(z)dz=2\pi i(2)=4\pi i$$

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} f(z)dz=4\pi i+2\pi i=6\pi i$$

$$\int_{|z-a|=1}\frac{dz}{(z-a)^m}=\begin{cases}2\pi i & m=1\\ 0 & m\neq 1\end{cases}$$

$$m=1\rightarrow b_1=1$$

$$m\neq 1\rightarrow b_1\neq 0$$



$$I=\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$$

$$z=e^{i\theta} \quad \rightarrow \quad 0<\theta<2\pi \quad \Rightarrow \quad |z|=1$$

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \quad \rightarrow \quad d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}={}^{1}\!/_{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$I=\int_{|z|=1} f\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}$$

مثال

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{17-8\cos\theta}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{17-\frac{8}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\int\frac{z^2+1}{\left(34z-8z^2-8\right)z}dz$$

$$=\frac{-1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z\left(4z^2-17z+4\right)}dz=\frac{-1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z(z-4)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$=\frac{-1}{2i}(2\pi i)\left(1-\frac{17}{15}\right)=\frac{2\pi}{15}$$

دو قطب مرتبه اول صفر و ${}^{1}\!/_{4}$

$f(z)$:1 را در $\left(z-{}^{1}\!/_{4}\right)$ ضرب کرده و بجای Z ، ${}^{1}\!/_{4}$ قرار می دهیم

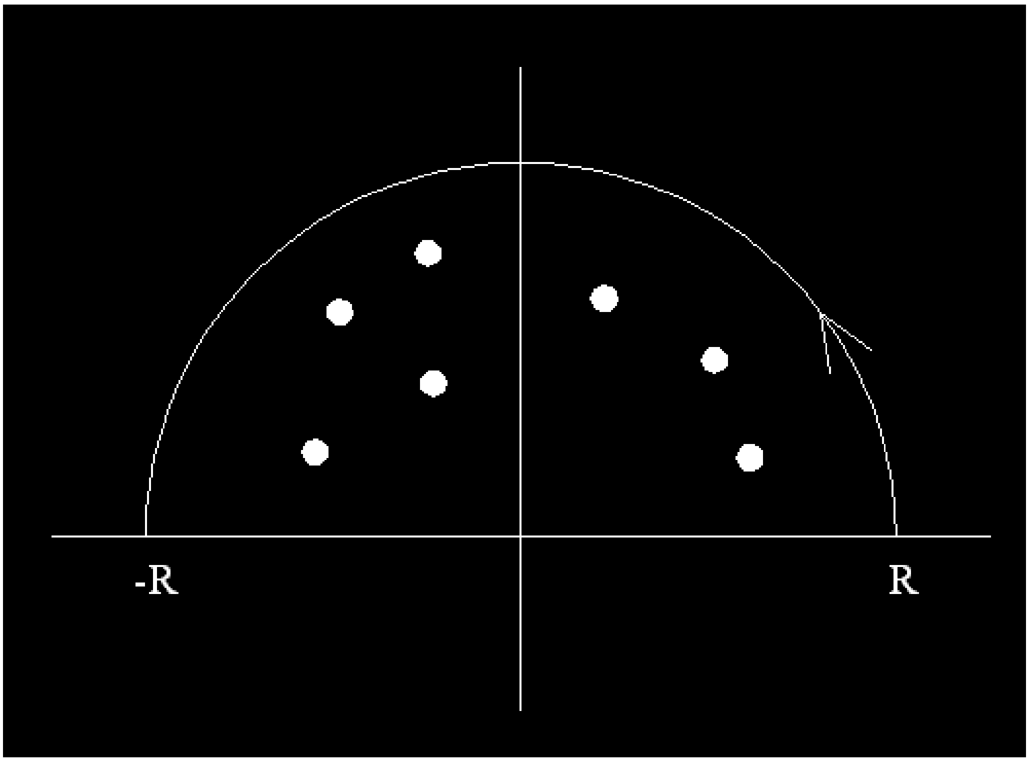
$f(z)\ \frac{17}{15}$: را در Z ضرب کرده و بجای Z ، صفر می گذاریم

مثال

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\qquad(-1<a<1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}dx$$

f,g چند جمله ای باشند و درجه مخرج لااقل برابر درجه صورت بعلاوه دو باشد و مخرج ریشه حقیقی نداشته باشد.
نیم دایره ای در نظر می گیریم که تمام قطب های بالای سر صفحه داخل آن باشند.



بالای محور حقیقی

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz+\int_{c} f(z)dz=2\pi i\sum \operatorname{Res} f(z)$$

R را به بی نهایت میل می دهیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{g(x)}dx=2\pi i\sum \operatorname{Res}\frac{f(z)}{g(z)}$$

بالای محور حقیقی ، Z در نیم صفحه فوقانی است

مثال

چون تابع زوج است

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

$$\text{even Function}: \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

$$x^4+1=0 \rightarrow x^4=-1=\cos\pi+i\sin\pi \Rightarrow z_k=\cos\frac{2k\pi+\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{4}$$

دو ریشه از چهار ریشه فوق در بالای محور X ها قرار دارند.

$$z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad , \quad z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$\operatorname{Res}\frac{z^2+1}{z^4+1}=\left(\frac{z^2+1}{4z^3}\right)_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}=\frac{\frac{1}{2}(2i)+1}{4\left(\frac{1}{2}\right)(2i)\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}=\frac{1}{2\sqrt{2}i}$$

$$\operatorname{Res}\frac{z^2+1}{z^4+1}=\left(\frac{z^2+1}{4z^3}\right)_{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}=\frac{\frac{1}{2}(-2i)+1}{4\left(\frac{1}{2}\right)(-2i)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1-i)}=\frac{1}{2\sqrt{2}i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx=2\pi i\left(\frac{1}{2\sqrt{2}i}+\frac{1}{2\sqrt{2}i}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

اتگرال های نوع بعدی

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\cos\alpha x dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\sin\alpha x dx = ? \quad , \quad \alpha>0$$

وشرایط نوع انتگرال های قبلی

Z بالای محور X ها

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)e^{i\alpha x}}{g(x)}dx = 2\pi i\sum \operatorname{Res}\frac{f(z)e^{i\alpha z}}{g(z)}$$

اگر α منفی باشد با یک تغییر متغیر می توان مساله را حل کرد

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

مثال

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 4ix}{(x^2+1)(x^2+4)}dx \quad , \quad \int\frac{e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

$$\begin{cases} x^2=-1 \rightarrow x=\pm i \\ x^2=-4 \rightarrow x=\pm 2i \end{cases} \quad \operatorname{Res}_{x=i}\frac{e^{4ix}}{(x+i)(x-i)(x^2+4)} = \left(\frac{e^{4ix}}{(x+i)(x^2+4)}\right)_{x=i} =$$

$$= \frac{e^{-4}}{6i}$$

$$\operatorname{Res}_{x=2i}\frac{e^{4ix}}{\left(x^2+1\right)(x-2i)(x+2i)}=\left(\frac{e^{4ix}}{\left(x^2+1\right)(x+2i)}\right)_{x=2i}=-\frac{e^{-8}}{12i}$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{4ix}}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx=2\pi i\left(\frac{e^{-4}}{6i}-\frac{e^{-8}}{12i}\right)=\pi/6\left(2e^{-4}-e^{-8}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 4ix}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx+i\int\frac{\sin 4ix}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx=\pi/6\left(2e^{-4}-e^{-8}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 4ix}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx=\pi/6\left(2e^{-4}-e^{-8}\right)\\&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 4ix}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx=0\end{aligned}}$$

تمرین

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\frac{\pi}{e}\quad,\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=0$$

تمرین های صفحه 183و184و188 کتاب چرچیل

جلسه آخر ارایه چند تمرین

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z\sin z}\,dz = ?$$

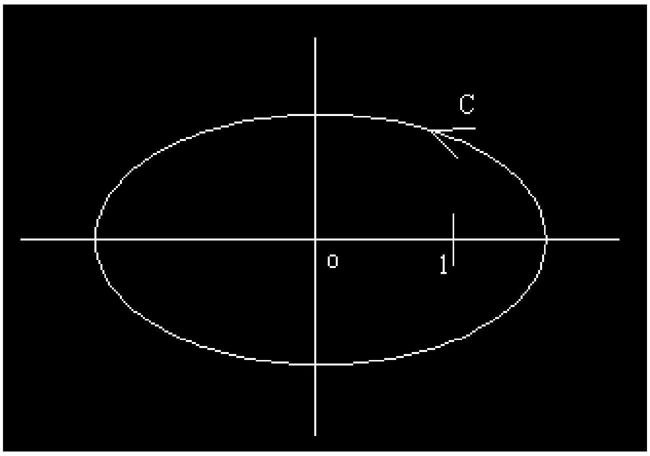
قطب از درجه دو است
چون مخرج و مشتق اول مخرج در صفر، صفر است.

$$\sin z + z\cos z \rightarrow \cos z + \cos z - z\sin z$$

بنابراین باید در z^2 ضرب کرده و یکبار مشتق بگیریم :

$$b_1 = \left[\left(\frac{z(z^2+1)}{\sin z}\right)'\right]_{z=0} = \left[\left(\frac{z^3+z}{\sin z}\right)'\right]_{z=0} = \left[\frac{(3z^2+1)\sin z - \cos z(z^3+z)}{(\sin z)^2}\right]$$

مثال



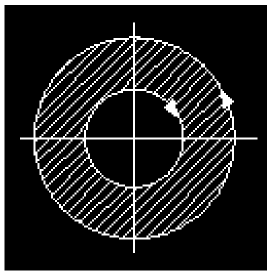
$$I=\int_c \frac{2z-1}{z^2-z}dz$$

$$\frac{2z-1}{z^2-z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1} \quad \Rightarrow \quad I=2\pi i(1+1)=4\pi i$$

$$\int_c \frac{z^2-z+1}{z^3-z^2}dz \qquad \begin{cases} a) & |z|=2 \qquad (2\pi i) \\ b) & |z|=1/2 \qquad (0) \end{cases}$$

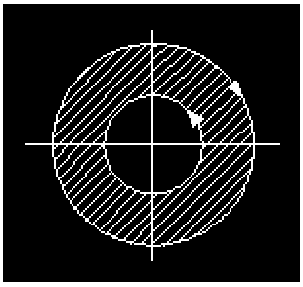
$$\int_c \frac{z}{z^2+1}dz \qquad \begin{cases} a) & |z|=2 \qquad (2\pi i) \\ b) & |z+i|=1 \qquad (\pi i) \end{cases}$$

$$\int_c \frac{e^z}{z}dz \qquad \begin{cases} |z|=2 \qquad (0) \\ |z|=1 \qquad (0) \end{cases}$$



$$\int \frac{3z+1}{z^3-z}dz \qquad \begin{cases} |z|=1/2 \qquad (-2\pi i) \\ |z|=2 \qquad (0) \end{cases}$$

$$\int_c \frac{dz}{z^4+4z^2}=0 \qquad \begin{cases} |z|=3/2 \\ |z|=1 \end{cases}$$



$$\int_c \frac{z^2+1}{z^2-1} \qquad \begin{cases} a) z=1 \quad center \\ \quad radius=1 \end{cases} I=\int \frac{\frac{z^2+1}{z+1}}{z-1}dz=2\pi i\left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)_{z=1}=2\pi i$$

$$\begin{cases} b) z=\tfrac{1}{2} \quad center \\ \quad radius=1 \end{cases} \qquad I=0$$

$$c) \qquad z=-1 \quad \Rightarrow \quad I=\int \frac{\frac{z^2+1}{z-1}}{z+1}dz=2\pi i\left(\frac{z^2+1}{z-1}\right)_{z=-1}=-2\pi i$$

$$d) \qquad z=i \quad \Rightarrow \quad I=0$$

$$\int_{|z|=1} \frac{(z+4)^3}{z^4+5z^3+6z^2}dz=\frac{-16\pi i}{9}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2-5z}dz=\frac{-2\pi i}{5} \quad , \quad \int \frac{e^z}{\cos z}dz=0$$

$$\int \frac{\cosh z}{z^2-3iz}dz=\frac{-2\pi}{3}$$

مثال

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} = \int_c \frac{\frac{dz}{iz}}{1-2p\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+p^2} \qquad 0<p<1$$

$$= \int \frac{dz}{i(1-pz)(z-p)} \qquad \textit{real} \qquad \textit{number}$$

$$=\int \frac{dz}{i(1-pz)(z-p)}$$

simple poles $\quad z=\frac{1}{p}>1 \quad , \quad z=p<1$

$$\operatorname{Res}_{z=p}\frac{1}{i(1-pz)(z-p)}=\left[\frac{1}{i(1-pz)}\right]_{z=p}=\frac{1}{i\left(1-p^2\right)}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=2\pi i\frac{1}{i\left(1-p^2\right)}=\frac{2\pi}{1-p^2}\left(0<p<1\right)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$f(z)=\frac{1}{1+z^4} \qquad poles{:}z_1=e^{\pi i/4},z_2=e^{3\pi i/4},z_3=e^{-3\pi i/4},z_4=e^{-\pi i/4}$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z)=\left[\frac{1}{\left(1+z^4\right)'}\right]_{z=z_1}=\left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_1}=\tfrac{1}{4}e^{-3\pi i/4}=-\tfrac{1}{4}e^{\pi i/4}$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} f(z)=\left[\frac{1}{\left(1+z^4\right)'}\right]_{z=z_2}=\left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_2}=\tfrac{1}{4}e^{-4\pi i/4}=\tfrac{1}{4}e^{-\pi i/4}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i\left(-\tfrac{1}{4}e^{\pi i/4}+\tfrac{1}{4}e^{-\pi i/4}\right)=\pi\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} \qquad (even \quad function)$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad , \quad \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{k+\cos\theta}(k>1)=\frac{\pi}{\sqrt{k^2-1}}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-3\cos\theta}=\pi/2 \quad , \quad \int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{3+\sin\theta}d\theta=0$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5/4-\sin\theta}=8\pi/3$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{26-10\cos 2\theta}d\theta=-\frac{1}{20i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)^2}{z\left(z^2-{}^1\!/_5\right)\left(z^2-5\right)}dz=\frac{\pi}{20}$$

$$\cos 2\theta=\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}=\frac{2\pi}{3},\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{3\pi}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{1+x^8}dx=0,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}=\frac{\pi}{12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\left(x^2-2x+2\right)^2}dx={}^{\pi}\!/_{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\frac{\pi}{e},\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx=\frac{\pi e^{-\alpha}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^4+1}dx={}^{\pi e^{-{}^1\!/_{\sqrt{2}}}\left[\sin\left({}^1\!/_{\sqrt{2}}\right)+\cos\left({}^1\!/_{\sqrt{2}}\right)\right]}\!\Big/_{\sqrt{2}}$$